Logika
[dla Psychologii UW]

Tadeusz Ciecierski
taci@uw.edu.pl

Uniwersytet Warszawski

8 listopada 2011

Plan wykładu

1. Zbiory - podstawowe wiadomości

Plan wykładu

1. Zbiory - podstawowe wiadomości
2. Wybrane zastosowania

Dwa pojęcia *zbioru*

Zbiór w sensie dystrybutywnym i zbiór w sensie kolektywnym

Słowo „zbiór" oraz jego odpowiedniki („mnogość", „klasa", „agregat") ma dwa różne użycia:

Zbiór w sensie dystrybutywnym i zbiór w sensie kolektywnym

Słowo „zbiór" oraz jego odpowiedniki („mnogość", „klasa", „agregat") ma dwa różne użycia:

[1] Dystrybutywne (teoriomnogościowe)

Dwa pojęcia *zbioru*

Zbiór w sensie dystrybutywnym i zbiór w sensie kolektywnym

Słowo „zbiór” oraz jego odpowiedniki („mnogość”, „klasa”, „agregat”) ma dwa różne użycia:

[1] Dystrybutywne (teoriomnogościowe)

[2] Kolektywne (mereologiczne)

Dwa pojęcia *zbioru*

Zbiór w sensie dystrybutywnym

Pojęcia *zbioru w sensie dystrybutywnym* zazwyczaj się nie definiuje – na poziomie nieformalnym zakłada się zazwyczaj albo że jest samo przez się zrozumiałe, na poziomie formalnym charakteryzyje się zbiory aksjomatycznie – jako przedmioty, o których mówi *teoria zbiorów*.

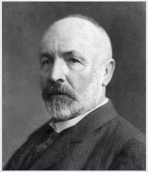
Dwa pojęcia *zbioru*

Zbiór w sensie dystrybutywnym

Pojęcia *zbioru w sensie dystrybutywnym* zazwyczaj się nie definiuje – na poziomie nieformalnym zakłada się zazwyczaj albo że jest samo przez się zrozumiałe, na poziomie formalnym charakteryzyje się zbiory aksjomatycznie – jako przedmioty, o których mówi *teoria zbiorów*.

Georg Cantor (1845-1918)

„Zbiór jest zebraniem w całość określonych i różnych od siebie przedmiotów naszej intuicji lub naszego umysłu. Przedmioty te nazywamy elementami zbioru"



Zbiory w sensie dystrybutywnym

Dwie metody tworzenia zbiorów

Na poziomie nieformalnym możemy powiedzieć, że zbiór w sensie dystrybutywnym to abstrakcyjny przedmiot, który zawiera jako swoje elementy pewne przedmioty (które same mogą być zbiorami). Tak pojęte zbiory tworzy się oraz charakteryzuje **poprzez podanie listy ich elementów** lub **wskazanie cechy, której posiadanie jest koniecznym i wystarczającym warunkiem przynależności do zbioru**.

Wyliczenie elementów

Zbiory w sensie dystrybutywnym

Dwie metody tworzenia zbiorów

Na poziomie nieformalnym możemy powiedzieć, że zbiór w sensie dystrybutywnym to abstrakcyjny przedmiot, który zawiera jako swoje elementy pewne przedmioty (które same mogą być zbiorami). Tak pojęte zbiory tworzy się oraz charakteryzuje **poprzez podanie listy ich elementów** lub **wskazanie cechy, której posiadanie jest koniecznym i wystarczającym warunkiem przynależności do zbioru**.

Wyliczenie elementów

{Monica Bellucci}

Zbiory w sensie dystrybutywnym

Dwie metody tworzenia zbiorów

Na poziomie nieformalnym możemy powiedzieć, że zbiór w sensie dystrybutywnym to abstrakcyjny przedmiot, który zawiera jako swoje elementy pewne przedmioty (które same mogą być zbiorami). Tak pojęte zbiory tworzy się oraz charakteryzuje **poprzez podanie listy ich elementów** lub **wskazanie cechy, której posiadanie jest koniecznym i wystarczającym warunkiem przynależności do zbioru**.

Wyliczenie elementów

{Monica Bellucci}
{Gniezno, Poznań, Kraków}

Zbiory w sensie dystrybutywnym

Dwie metody tworzenia zbiorów

Na poziomie nieformalnym możemy powiedzieć, że zbiór w sensie dystrybutywnym to abstrakcyjny przedmiot, który zawiera jako swoje elementy pewne przedmioty (które same mogą być zbiorami). Tak pojęte zbiory tworzy się oraz charakteryzuje **poprzez podanie listy ich elementów** lub **wskazanie cechy, której posiadanie jest koniecznym i wystarczającym warunkiem przynależności do zbioru**.

Wyliczenie elementów

{Monica Bellucci}
{Gniezno, Poznań, Kraków}
{Merkury, Wenus, Ziemia, Mars, Jowisz, Saturn, Uran, Neptun, [a może i Pluton]}

Zbiory w sensie dystrybutywnym

Dwie metody tworzenia zbiorów

Na poziomie nieformalnym możemy powiedzieć, że zbiór w sensie dystrybutywnym to abstrakcyjny przedmiot, który zawiera jako swoje elementy pewne przedmioty (które same mogą być zbiorami). Tak pojęte zbiory tworzy się oraz charakteryzuje **poprzez podanie listy ich elementów** lub **wskazanie cechy, której posiadanie jest koniecznym i wystarczającym warunkiem przynależności do zbioru**.

Wyliczenie elementów

{Monica Bellucci}
{Gniezno, Poznań, Kraków}
{Merkury, Wenus, Ziemia, Mars, Jowisz, Saturn, Uran, Neptun, [a może i Pluton]}
Metoda mało efektywna - niekiedy (zbiory bardzo liczne lub nieskończone - niemożliwa do zastosowania):
{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 ...}

Zbiory w sensie dystrybutywnym

Operator abstrakcji

Aby opisać własność wspólną wszystkim (i tylko) elementom danego zbioru używa się tzw. **operatora abstrakcji**.

Zbiory w sensie dystrybutywnym

Operator abstrakcji

Aby opisać własność wspólną wszystkim (i tylko) elementom danego zbioru uzywa się tzw. **operatora abstrakcji**.

$\{x\colon (...x—)\}$

Co czytamy: ogół (zbiór wszystkich) takich x, które spełniają warunek (własność): (... —).

PRZYKŁADY

Zbiory w sensie dystrybutywnym

Operator abstrakcji

Aby opisać własność wspólną wszystkim (i tylko) elementom danego zbioru uzywa się tzw. **operatora abstrakcji**.
$\{x$: (...x—)$\}$
Co czytamy: ogół (zbiór wszystkich) takich x, które spełniają warunek (własność): (... —).

PRZYKŁADY

$\{x$: x jest włoską aktorką, która grała jedną z konkubin Draculi w ekranizacji Coppoli$\}$

Zbiory w sensie dystrybutywnym

Operator abstrakcji

Aby opisać własność wspólną wszystkim (i tylko) elementom danego zbioru uzywa się tzw. **operatora abstrakcji**.
$\{x$: (...x—)$\}$
Co czytamy: ogół (zbiór wszystkich) takich x, które spełniają warunek (własność): (... —).

PRZYKŁADY

$\{x$: x jest włoską aktorką, która grała jedną z konkubin Draculi w ekranizacji Coppoli$\}$
$\{x$: x jest przeszłą stolicą Polski$\}$

Zbiory w sensie dystrybutywnym

Operator abstrakcji

Aby opisać własność wspólną wszystkim (i tylko) elementom danego zbioru używa się tzw. **operatora abstrakcji**.

{*x*: (...*x*—)}

Co czytamy: ogół (zbiór wszystkich) takich *x*, które spełniają warunek (własność): (... —).

PRZYKŁADY

{*x*: *x* jest włoską aktorką, która grała jedną z konkubin Draculi w ekranizacji Coppoli}

{*x*: *x* jest przeszłą stolicą Polski}

{*x*: *x* jest planetą Układu Słonecznego}

Zbiory w sensie dystrybutywnym

Operator abstrakcji

Aby opisać własność wspólną wszystkim (i tylko) elementom danego zbioru uzywa się tzw. **operatora abstrakcji**.

{*x*: (...*x*—)}

Co czytamy: ogół (zbiór wszystkich) takich *x*, które spełniają warunek (własność): (... —).

PRZYKŁADY

{*x*: *x* jest włoską aktorką, która grała jedną z konkubin Draculi w ekranizacji Coppoli}

{*x*: *x* jest przeszłą stolicą Polski}

{*x*: *x* jest planetą Układu Słonecznego}

{*x*: *x* jest liczbą naturalną parzystą}

Przynależność do zbioru

Fakt przynależności elementu do zbioru oznaczamy symbolem „$\in$”, formułę o postaci „$x \in A$” czytamy jako „x jest elementem zbioru A"(„x należy do zbioru A”).

Zbiory w sensie dystrybutywnym

Przynależność do zbioru

Fakt przynależności elementu do zbioru oznaczamy symbolem „$\in$", formułę o postaci „$x \in A$" czytamy jako „x jest elementem zbioru A"(„x należy do zbioru A").

PRZYKŁADY

Monica Bellucci $\in$ {x: x jest włoską aktorką, która grała jedną z konkubin Draculi w ekranizacji Coppoli}

Zbiory w sensie dystrybutywnym

Przynależność do zbioru

Fakt przynależności elementu do zbioru oznaczamy symbolem „$\in$”, formułę o postaci „$x \in A$” czytamy jako „x jest elementem zbioru A"(„x należy do zbioru A”).

PRZYKŁADY

Monica Bellucci $\in$ {x: x jest włoską aktorką, która grała jedną z konkubin Draculi w ekranizacji Coppoli}

Gniezno $\in$ {x: x jest przeszłą stolicą Polski}

Zbiory w sensie dystrybutywnym

Przynależność do zbioru

Fakt przynależności elementu do zbioru oznaczamy symbolem „$\in$”, formułę o postaci „$x \in A$” czytamy jako „x jest elementem zbioru A"(„x należy do zbioru A”).

PRZYKŁADY

Monica Bellucci $\in$ {x: x jest włoską aktorką, która grała jedną z konkubin Draculi w ekranizacji Coppoli}
Gniezno $\in$ {x: x jest przeszłą stolicą Polski}
Ziemia $\in$ {x: x jest planetą Układu Słonecznego}

Zbiory w sensie dystrybutywnym

Przynależność do zbioru

Fakt przynależności elementu do zbioru oznaczamy symbolem „$\in$”, formułę o postaci „$x \in A$” czytamy jako „x jest elementem zbioru A"(„x należy do zbioru A”).

PRZYKŁADY

Monica Bellucci $\in$ {x: x jest włoską aktorką, która grała jedną z konkubin Draculi w ekranizacji Coppoli}
Gniezno $\in$ {x: x jest przeszłą stolicą Polski}
Ziemia $\in$ {x: x jest planetą Układu Słonecznego}
9992 $\in$ {x: x jest liczba naturalną parzystą}

Zbiory w sensie dystrybutywnym

Przynależność do zbioru

Fakt przynależności elementu do zbioru oznaczamy symbolem „$\in$”, formułę o postaci „$x \in A$” czytamy jako „x jest elementem zbioru A"(„x należy do zbioru A”).

PRZYKŁADY

Monica Bellucci $\in$ {x: x jest włoską aktorką, która grała jedną z konkubin Draculi w ekranizacji Coppoli}
Gniezno $\in$ {x: x jest przeszłą stolicą Polski}
Ziemia $\in$ {x: x jest planetą Układu Słonecznego}
9992 $\in$ {x: x jest liczba naturalną parzystą}

Przynależność do zbioru

Wszystkie (*sic*!)pojęcia związne ze zbiorami w sensie dystrybutywnym można zdefiniować posługując się tym jednym symbolem [i standardowymi operacjami logicznymi].

Zawieranie się zbiorów

Inkluzja

Jeśli każdy element zbioru A jest też elementem zbioru B, to powiemy, że zbiór A zawiera się w zbiorze B:

Zawieranie się zbiorów

Inkluzja

Jeśli każdy element zbioru A jest też elementem zbioru B, to powiemy, że zbiór A zawiera się w zbiorze B:

Dla każdego x: jeśli $x \in A$, to $x \in B =_{df} A \subseteq B$

Zawieranie się zbiorów

Inkluzja właściwa

Jeśli każdy element zbioru A jest też elementem zbioru B oraz pewien element zbioru B nie jest elementem zbioru A, to powiemy, że zbiór A zawiera się właściwie w zbiorze B:

Zawieranie się zbiorów

Inkluzja właściwa

Jeśli każdy element zbioru A jest też elementem zbioru B oraz pewien element zbioru B nie jest elementem zbioru A, to powiemy, że zbiór A zawiera się właściwie w zbiorze B:

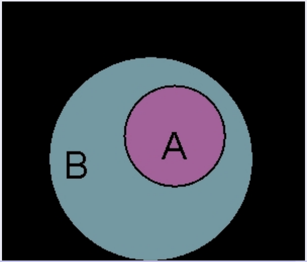
Dla każdego x: jeśli $x \in A$, to $x \in B$ oraz dla pewnego x: $x \in B$ oraz $x \notin A =_{df} A \subsetneq B$

Inkluzja właściwa

Jeśli każdy element zbioru A jest też elementem zbioru B oraz pewien element zbioru B nie jest elementem zbioru A, to powiemy, że zbiór A zawiera się właściwie w zbiorze B:

Dla każdego x: jeśli $x \in A$, to $x \in B$ oraz dla pewnego x: $x \in B$ oraz $x \notin A =_{df} A \subsetneq B$

INKLUZJA



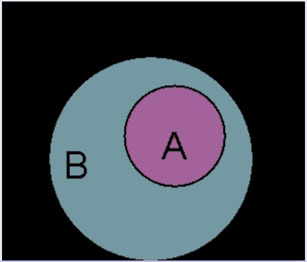
Zawieranie się zbiorów

Inkluzja właściwa

Jeśli każdy element zbioru A jest też elementem zbioru B oraz pewien element zbioru B nie jest elementem zbioru A, to powiemy, że zbiór A zawiera się właściwie w zbiorze B:

Dla każdego x: jeśli $x \in A$, to $x \in B$ oraz dla pewnego x: $x \in B$ oraz $x \notin A =_{df} A \subsetneq B$

INKLUZJA



Identyczność

Dwa zbiory są identyczne, gdy mają dokładnie takie same elementy (AKSJOMAT EKSTENSJONALNOŚCI).

Identyczność zbiorów

Identyczność

Dwa zbiory są identyczne, gdy mają dokładnie takie same elementy (AKSJOMAT EKSTENSJONALNOŚCI).

$A = B =_{df} A \subseteq B$ oraz $B \subseteq A$

Identyczność zbiorów

Identyczność

Dwa zbiory są identyczne, gdy mają dokładnie takie same elementy (AKSJOMAT EKSTENSJONALNOŚCI).

$A = B =_{df} A \subseteq B$ oraz $B \subseteq A$

$A = B =_{df}$ dla każdego x: jeśli $x \in A$, to $x \in B$ oraz dla każdego x: jeśli $x \in B$, to $x \in A$

Identyczność zbiorów

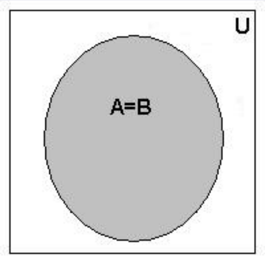
Identyczność

Dwa zbiory są identyczne, gdy mają dokładnie takie same elementy (AKSJOMAT EKSTENSJONALNOŚCI).

$A = B =_{df} A \subseteq B$ oraz $B \subseteq A$

$A = B =_{df}$ dla każdego x: jeśli $x \in A$, to $x \in B$ oraz dla każdego x: jeśli $x \in B$, to $x \in A$

IDENTYCZNOŚĆ



Suma

Zbiór X jest sumą zbiorów A i B (symbolicznie „$A \cup B$”), gdy zawiera wszystkie elementy, które należą przynajmniej do jednego z tych zbiorów.

Operacje na zbiorach - suma zbiorów

Suma

Zbiór X jest sumą zbiorów A i B (symbolicznie „$A \cup B$"), gdy zawiera wszystkie elementy, które należą przynajmniej do jednego z tych zbiorów.

$A \cup B =_{df} \{x\colon x \in A \text{ lub } x \in B\}$

Suma

Zbiór X jest sumą zbiorów A i B (symbolicznie „$A \cup B$”), gdy zawiera wszystkie elementy, które należą przynajmniej do jednego z tych zbiorów.

$A \cup B =_{df} \{x\colon x \in A \text{ lub } x \in B\}$

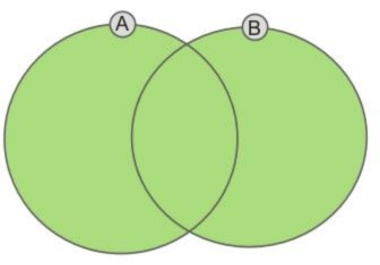
Operacje na zbiorach - suma zbiorów

Suma

Zbiór X jest sumą zbiorów A i B (symbolicznie „$A \cup B$”), gdy zawiera wszystkie elementy, które należą przynajmniej do jednego z tych zbiorów.

$A \cup B =_{df} \{x\colon x \in A \text{ lub } x \in B\}$

SUMA ZBIORÓW



Operacje na zbiorach - iloczyn zbiorów

Iloczyn

Zbiór X jest iloczynem zbiorów A i B (symbolicznie „$A \cap B$”), gdy zawiera wszystkie elementy, które należą jednocześnie do obu tych zbiorów.

Operacje na zbiorach - iloczyn zbiorów

Iloczyn

Zbiór X jest iloczynem zbiorów A i B (symbolicznie „$A \cap B$”), gdy zawiera wszystkie elementy, które należą jednocześnie do obu tych zbiorów.

$A \cap B =_{df} \{x\colon x \in A \text{ oraz } x \in B\}$

Operacje na zbiorach - iloczyn zbiorów

Iloczyn

Zbiór X jest iloczynem zbiorów A i B (symbolicznie „$A \cap B$"), gdy zawiera wszystkie elementy, które należą jednocześnie do obu tych zbiorów.

$$A \cap B =_{df} \{x\colon x \in A \text{ oraz } x \in B\}$$

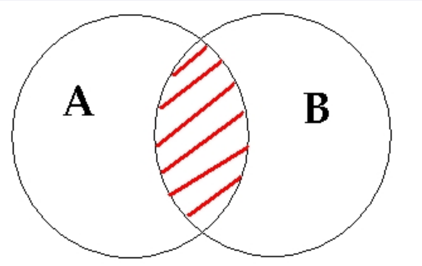
Operacje na zbiorach - iloczyn zbiorów

Iloczyn

Zbiór X jest iloczynem zbiorów A i B (symbolicznie „$A \cap B$”), gdy zawiera wszystkie elementy, które należą jednocześnie do obu tych zbiorów.

$A \cap B =_{df} \{x\colon x \in A \text{ oraz } x \in B\}$

ILOCZYN ZBIORÓW



RÓŻNICA ZBIORÓW

Zbiór X jest różnicą zbiorów A i B (symbolicznie „$A - B$”), gdy zawiera wszystkie elementy, które należą do zbioru A, które zarazem nie należą do zbioru B.

Operacje na zbiorach - iloczyn zbiorów

RÓŻNICA ZBIORÓW

Zbiór X jest różnicą zbiorów A i B (symbolicznie „$A - B$"), gdy zawiera wszystkie elementy, które należą do zbioru A, które zarazem nie należą do zbioru B.

$A - B =_{df} \{x \colon x \in A \text{ oraz } x \notin B\}$

RÓŻNICA ZBIORÓW

Zbiór X jest różnicą zbiorów A i B (symbolicznie „$A - B$"), gdy zawiera wszystkie elementy, które należą do zbioru A, które zarazem nie należą do zbioru B.

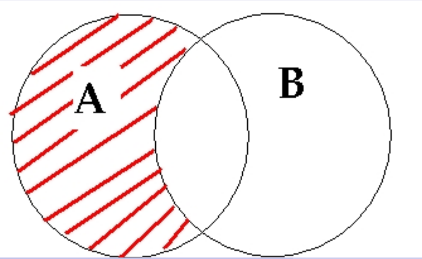
$A - B =_{df} \{x\colon x \in A \text{ oraz } x \notin B\}$

RÓŻNICA ZBIORÓW

Zbiór X jest różnicą zbiorów A i B (symbolicznie „$A - B$”), gdy zawiera wszystkie elementy, które należą do zbioru A, które zarazem nie należą do zbioru B.

$A - B =_{df} \{x \colon x \in A \text{ oraz } x \notin B\}$

RÓŻNICA ZBIORÓW



AKSJOMATY TEORII MNOGOŚCI - PRZEGLĄD

(Ax1) AKSJOMAT EKSTENSJONALNOŚĆI (już go znamy)

AKSJOMATY TEORII MNOGOŚCI - PRZEGLĄD

(Ax1) AKSJOMAT EKSTENSJONALNOŚĆI (już go znamy)
(Ax2) AKSJOMAT ZASTĘPOWANIA (nie omawiamy)

Nieformalny przegląd aksjomatów teorii mnogości

AKSJOMATY TEORII MNOGOŚCI - PRZEGLĄD

(Ax1) AKSJOMAT EKSTENSJONALNOŚĆI (już go znamy)
(Ax2) AKSJOMAT ZASTĘPOWANIA (nie omawiamy)
(Ax3) AKSJOMAT WYRÓŻNIANIA

AKSJOMATY TEORII MNOGOŚCI - PRZEGLĄD

(Ax1) AKSJOMAT EKSTENSJONALNOŚĆI (już go znamy)
(Ax2) AKSJOMAT ZASTĘPOWANIA (nie omawiamy)
(Ax3) AKSJOMAT WYRÓŻNIANIA
(Ax4) AKSJOMAT PARY

AKSJOMATY TEORII MNOGOŚCI - PRZEGLĄD

(Ax1) AKSJOMAT EKSTENSJONALNOŚĆI (już go znamy)
(Ax2) AKSJOMAT ZASTĘPOWANIA (nie omawiamy)
(Ax3) AKSJOMAT WYRÓŻNIANIA
(Ax4) AKSJOMAT PARY
(Ax5) AKSJOMAT SUMY

AKSJOMATY TEORII MNOGOŚCI - PRZEGLĄD

(Ax1) AKSJOMAT EKSTENSJONALNOŚĆI (już go znamy)
(Ax2) AKSJOMAT ZASTĘPOWANIA (nie omawiamy)
(Ax3) AKSJOMAT WYRÓŻNIANIA
(Ax4) AKSJOMAT PARY
(Ax5) AKSJOMAT SUMY
(Ax6) AKSJOMAT ZBIORU POTĘGOWEGO

AKSJOMATY TEORII MNOGOŚCI - PRZEGLĄD

(Ax1) AKSJOMAT EKSTENSJONALNOŚĆI (już go znamy)
(Ax2) AKSJOMAT ZASTĘPOWANIA (nie omawiamy)
(Ax3) AKSJOMAT WYRÓŻNIANIA
(Ax4) AKSJOMAT PARY
(Ax5) AKSJOMAT SUMY
(Ax6) AKSJOMAT ZBIORU POTĘGOWEGO
(Ax7) AKSJOMAT NIESKOŃCZONOŚCI

AKSJOMATY TEORII MNOGOŚCI - PRZEGLĄD

(Ax1) AKSJOMAT EKSTENSJONALNOŚĆI (już go znamy)
(Ax2) AKSJOMAT ZASTĘPOWANIA (nie omawiamy)
(Ax3) AKSJOMAT WYRÓŻNIANIA
(Ax4) AKSJOMAT PARY
(Ax5) AKSJOMAT SUMY
(Ax6) AKSJOMAT ZBIORU POTĘGOWEGO
(Ax7) AKSJOMAT NIESKOŃCZONOŚCI
(Ax8) AKSJOMAT WYBORU

AKSJOMATY TEORII MNOGOŚCI - PRZEGLĄD

(Ax1) AKSJOMAT EKSTENSJONALNOŚĆI (już go znamy)
(Ax2) AKSJOMAT ZASTĘPOWANIA (nie omawiamy)
(Ax3) AKSJOMAT WYRÓŻNIANIA
(Ax4) AKSJOMAT PARY
(Ax5) AKSJOMAT SUMY
(Ax6) AKSJOMAT ZBIORU POTĘGOWEGO
(Ax7) AKSJOMAT NIESKOŃCZONOŚCI
(Ax8) AKSJOMAT WYBORU
(Ax9) AKSJOMAT UFUNDOWANIA

AKSJOMAT WYRÓŻNIANIA

Prehistoria - fascynujący aksjomat o dramatycznej historii. W wersji klasycznej głosił, że:

Nieformalny przegląd aksjomatów teorii mnogości

AKSJOMAT WYRÓŻNIANIA

Prehistoria - fascynujący aksjomat o dramatycznej historii. W wersji klasycznej głosił, że:

Dla dowolnego warunku W istnieją zbiór dokładnie tych przedmiotów, które spełniają warunek W.

ANTYNOMIA RUSSELLA

W tej wersji prowadził jednak do następującej sprzeczności:

Nieformalny przegląd aksjomatów teorii mnogości

AKSJOMAT WYRÓŻNIANIA

Prehistoria - fascynujący aksjomat o dramatycznej historii. W wersji klasycznej głosił, że:

Dla dowolnego warunku W istnieją zbiór dokładnie tych przedmiotów, które spełniają warunek W.

ANTYNOMIA RUSSELLA

W tej wersji prowadził jednak do następującej sprzeczności:
Wystarczy, że przyjmiemy, że warunek W to: x nie jest własnym elementem ($x \notin x$) (spełniać warunek W = nie być własnym elementem).Zgodnie z aksjomatem musi istnieć zatem zbiór przedmiotów spełniających warunek W – a zatem zbiorów, które nie są własnymi elementami. Możemy nazwać ten zbiór POTWÓR.
Zadajemy teraz „zabójcze" pytanie: czy POTWÓR jest własnym elementem czy też nie?

Nieformalny przegląd aksjomatów teorii mnogości

AKSJOMAT WYRÓŻNIANIA

Prehistoria - fascynujący aksjomat o dramatycznej historii. W wersji klasycznej głosił, że:

Dla dowolnego warunku W istnieją zbiór dokładnie tych przedmiotów, które spełniają warunek W.

ANTYNOMIA RUSSELLA

W tej wersji prowadził jednak do następującej sprzeczności:
Wystarczy, że przyjmiemy, że warunek W to: x nie jest własnym elementem ($x \notin x$) (spełniać warunek W = nie być własnym elementem).Zgodnie z aksjomatem musi istnieć zatem zbiór przedmiotów spełniających warunek W – a zatem zbiorów, które nie są własnymi elementami. Możemy nazwać ten zbiór POTWÓR.
Zadajemy teraz „zabójcze" pytanie: czy POTWÓR jest własnym elementem czy też nie?

ANTYNOMIA RUSSELLA - cd.

Możliwość pierwsza: JEST.

ANTYNOMIA RUSSELLA - cd.

Możliwość pierwsza: JEST. Ale wtedy jest jednym ze zbioru przedmiotów, które nie są własnymi elementami. A zatem NIE JEST własnym elementem.

ANTYNOMIA RUSSELLA - cd.

Możliwość pierwsza: JEST. Ale wtedy jest jednym ze zbioru przedmiotów, które nie są własnymi elementami. A zatem NIE JEST własnym elementem.

Możliwość druga: NIE JEST.

ANTYNOMIA RUSSELLA - cd.

Możliwość pierwsza: JEST. Ale wtedy jest jednym ze zbioru przedmiotów, które nie są własnymi elementami. A zatem NIE JEST własnym elementem.

Możliwość druga: NIE JEST. Jeśli nie jest, to spełnia warunek W. Jest zatem jednym z przedmiotów, które są własnymi elementami. Zatem JEST własnym elementem.

AKSJOMAT WYRÓŻNIANIA

W wersji „poprawionej” głosił, że:

AKSJOMAT WYRÓŻNIANIA

W wersji „poprawionej" głosił, że:

Dla dowolnego zbioru A oraz warunku W istnieje zbiór, który zawiera wyłącznie te elementy zbioru A, które spełniają warunek W.

ANTYNOMIA RUSSELLA - DLACZEGO JEJ NIE OTRZYMUJEMY?

MUSIMY MIEĆ NAJPIERW JUŻ ISTNIEJĄCY ZBIÓR A (z którego wybierzemy elementy spełniające W). Antynomia Russella pozwala nam udowodnić, że nie ma zbioru wszystkich zbiorów nie będących własnymi elementami.

AKSJOMAT PARY

Głosi, że:

AKSJOMAT PARY

Głosi, że:

Dla dowolnych dwóch elementów a oraz b istnieje zbiór y, który zawiera jako swoje jedyne elementy a oraz b.

Nieformalny przegląd aksjomatów teorii mnogości

AKSJOMAT PARY

Głosi, że:

Dla dowolnych dwóch elementów a oraz b istnieje zbiór y, który zawiera jako swoje jedyne elementy a oraz b.

AKSJOMAT SUMY

Głosi, że:

Nieformalny przegląd aksjomatów teorii mnogości

AKSJOMAT PARY

Głosi, że:

Dla dowolnych dwóch elementów a oraz b istnieje zbiór y, który zawiera jako swoje jedyne elementy a oraz b.

AKSJOMAT SUMY

Głosi, że:

Dla dowolnego zbioru A istnieje taki zbiór, którego elementami są elementy elementów zbioru A i tylko one.
$\cup A$ - suma wszystkich elementów elementów zbioru A.

AKSJOMAT PARY

Głosi, że:

Dla dowolnych dwóch elementów a oraz b istnieje zbiór y, który zawiera jako swoje jedyne elementy a oraz b.

AKSJOMAT SUMY

Głosi, że:

Dla dowolnego zbioru A istnieje taki zbiór, którego elementami są elementy elementów zbioru A i tylko one.
$\cup A$ - suma wszystkich elementów elementów zbioru A.

PRZYKŁAD

$\bigcup\{\{\text{Monica Bellucci}\}, \{\text{Pałac Kultury}\}, \{\text{Azja}\}\} =$
$\{\text{Monica Bellucci, Pałac Kultury, Azja}\}$

PRZYKŁAD

$\bigcup\{\{\text{Monica Bellucci}\},\{\text{Pałac Kultury}\},\{\text{Azja}\}\} =$
$\{\text{Monica Bellucci, Pałac Kultury, Azja}\}$

AKSJOMAT ZBIORU POTĘGOWEGO

Głosi, że:

AKSJOMAT ZBIORU POTĘGOWEGO

Głosi, że:

Dla dowolnego zbioru X istnieje zbiór, którego elementami są wszystkie i tylko podzbiory X (oznaczamy go jako 2^X)

AKSJOMAT ZBIORU POTĘGOWEGO

Głosi, że:

Dla dowolnego zbioru X istnieje zbiór, którego elementami są wszystkie i tylko podzbiory X (oznaczamy go jako 2^X)

PRZYKŁAD

jeśli $X = \{\text{Monica Bellucci, Pałac Kultury, Azja}\}$, to:

AKSJOMAT ZBIORU POTĘGOWEGO

Głosi, że:

Dla dowolnego zbioru X istnieje zbiór, którego elementami są wszystkie i tylko podzbiory X (oznaczamy go jako 2^X)

PRZYKŁAD

jeśli $X = \{$Monica Bellucci, Pałac Kultury, Azja$\}$, to:
$2^X = \{ \emptyset$, $\{$Monica Bellucci$\}$, $\{$Pałac Kultury$\}$, $\{$Azja$\}$, $\{$Monica Bellucci, Pałac Kultury$\}$, $\{$Pałac Kultury, Azja$\}$, $\{$ Monica Bellucci, Azja$\}$, $\{$Monica Bellucci, Pałac Kultury, Azja$\}$ $\}$

AKSJOMAT NIESKOŃCZONOŚCI

Głosi, że:

AKSJOMAT NIESKOŃCZONOŚCI

Głosi, że:

Istnieje przynajmniej jeden zbiór Z o następujących właściwościach:

(1) $\emptyset \in Z$
(2) jeśli $x \in Z$, to $\{x\} \in Z$

AKSJOMAT WYBORU

Głosi, że:

AKSJOMAT WYBORU

Głosi, że:

Dla dowolnego zbioru, którego elementami są zbiory niepuste i rozłączne istnieje zbiór mający z każdym z tych zbiorów element wspólny.

BUTY I RĘKAWICZKI

Problem wyboru.

AKSJOMAT UFUNDOWANIA

Głosi, że:

AKSJOMAT UFUNDOWANIA

Głosi, że:

Każdy niepusty zbiór ma element rozłączny z tym zbiorem [dzięki niemu dowodzimy, że żaden zbiór nie jest własnym elementem].

Dwa pojęcia *zbioru*

Zbiór w sensie kolektywnym

Zbiór w sensie kolektywnym (lub mereologicznym) to fizyczna kolekcja przedmiotów, np. stos kamieni itp.

Dwa pojęcia *zbioru*

Zbiór w sensie kolektywnym

Zbiór w sensie kolektywnym (lub mereologicznym) to fizyczna kolekcja przedmiotów, np. stos kamieni itp.

Stanisław Leśniewski (1886-1939)

Dwa pojęcia *zbioru*

Zbiór w sensie kolektywnym a zbiór w sensie dystrybutywnym

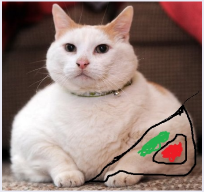
Podstawowa różnica między zbiorami w sensie kolektywnym oraz dystrybutywnym polega na tym, że relacja bycia częścią (elementem) jest w pierwszym wypadku przechodnia (część części jest częścią całości), a w drugim nie jest przechodnia (element elementu nie musi być elementem całości)

Dwa pojęcia *zbioru*

Zbiór w sensie kolektywnym a zbiór w sensie dystrybutywnym

Podstawowa różnica między zbiorami w sensie kolektywnym oraz dystrybutywnym polega na tym, że relacja bycia częścią (elementem) jest w pierwszym wypadku przechodnia (część części jest częścią całości), a w drugim nie jest przechodnia (element elementu nie musi być elementem całości)

Zbiory w sensie kolektywnym *versus* zbiory w sensie dystrybutywnym



$$1 \in \{1\}$$

$$\{1\} \in \{x\colon x \text{ jest podzbiorem zbioru liczb naturalnych}\}$$

$$1 \notin \{x\colon x \text{ jest podzbiorem zbioru liczb naturalnych}\}$$

Zbiór w sensie kolektywnym

Teoria zbiorów w sensie kolektywnym nazywana jest „mereologią". Ma ona różne swoje wersje, aksjomatyki itd. My jej tu nie omawiamy (ufff...).

Dwa pojęcia *zbioru*

Pytanie p. Dagmary

„Czym różni się Albert Einstein od {Albert Einstein} i 8 od {8}?”

Dwa pojęcia *zbioru*

Pytanie p. Dagmary

„Czym różni się Albert Einstein od {Albert Einstein} i 8 od {8}?”

Odpowiedź na pytanie p. Dagmary

1. Są to różne przedmioty o różnych cechach, np. Albert Einstein grywał na skrzypcach, a zbiór złożony z Alberta Einsteina - nie grywał na skrzypcach (zbiory w ogólności nie grywają na skrzypacach...).

Dwa pojęcia *zbioru*

Pytanie p. Dagmary

„Czym różni się Albert Einstein od {Albert Einstein} i 8 od {8}?"

Odpowiedź na pytanie p. Dagmary

1. Są to różne przedmioty o różnych cechach, np. Albert Einstein grywał na skrzypcach, a zbiór złożony z Alberta Einsteina - nie grywał na skrzypcach (zbiory w ogólności nie grywają na skrzypacach...).
2. (argument podany niegdyś przez Fregego): załóżmy, że zbiór jendoelementowy i jego element to w ogólności jedna i ta sama rzecz. Wyobraźmy sobie teraz, że mamy do czynienia z jakimś zbiorem A, którego jedynym elementem jest pewien inny zbiór B. Zbiór B niech zawiera z kolei (na przykład) dwa dowolne elementy (np. Pałac Kultury i liczbę π). Jeśli zbiór jednoelemntowy byłby tym samym, co jego element, to zbiór A posiadałby wtedy zarazem dokładnie jeden i dokładnie dwa elementy.

WYBRANE ZASTOSOWANIA

(A) RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW

WYBRANE ZASTOSOWANIA

(A) RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW
(B) TEORIA DEFINICJI

Zastosowania

WYBRANE ZASTOSOWANIA

(A) RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW
(B) TEORIA DEFINICJI
(C) TYPOLOGIA I KLASYFIKACJA

RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW

Jak pamiętamy, zakresy (denotacje) nazw są zbiorami.
„Warszawa" $\longrightarrow$ {miasto Warszawa},

RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW

Jak pamiętamy, zakresy (denotacje) nazw są zbiorami.
„Warszawa” $\longrightarrow$ {miasto Warszawa},
„nietymczasowy prezydent III RP” $\longrightarrow$ {Jaruzelski, Wałęsa, Kwaśniewski, Kaczyński, Komorowski},

RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW

Jak pamiętamy, zakresy (denotacje) nazw są zbiorami.
„Warszawa" $\longrightarrow$ {miasto Warszawa},
„nietymczasowy prezydent III RP" $\longrightarrow$ {Jaruzelski, Wałęsa, Kwaśniewski, Kaczyński, Komorowski},
„planeta Układu Słonecznego" $\longrightarrow$ {Merkury, Wenus, Ziemia, Mars, Jowisz, Saturn, Uran, Neptun, [a może i Pluton]}

RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW

Jak pamiętamy, zakresy (denotacje) nazw są zbiorami.
„Warszawa” $\longrightarrow$ {miasto Warszawa},
„nietymczasowy prezydent III RP” $\longrightarrow$ {Jaruzelski, Wałęsa, Kwaśniewski, Kaczyński, Komorowski},
„planeta Układu Słonecznego” $\longrightarrow$ {Merkury, Wenus, Ziemia, Mars, Jowisz, Saturn, Uran, Neptun, [a może i Pluton]}
„kuropatwa” $\longrightarrow$ {tu wyliczamy wszystkie kuropatwy na świecie}

RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW

Określając relacje między zakresami nazw faktycznie określamy zatem, jakie relacje zachodzą między odpowiednimi zbiorami.

RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW

Dla każdej pary nazw N_1 i N_2 istnieje pięć możliwych relacji między ich zakresami. Oznaczmy zakres nazwy N jako „Z[N]".

RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW

Dla każdej pary nazw N_1 i N_2 istnieje pięć możliwych relacji między ich zakresami. Oznaczmy zakres nazwy N jako „Z[N]”.

(i) Zakresy N_1 i N_2 są IDENTYCZNE

RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW

Dla każdej pary nazw N_1 i N_2 istnieje pięć możliwych relacji między ich zakresami. Oznaczmy zakres nazwy N jako „Z[N]".

(i) Zakresy N_1 i N_2 są IDENTYCZNE

(ii) Zakres N_1 jest PODRZĘDNY względem zakresu N_2

RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW

Dla każdej pary nazw N_1 i N_2 istnieje pięć możliwych relacji między ich zakresami. Oznaczmy zakres nazwy N jako „Z[N]".

(i) Zakresy N_1 i N_2 są IDENTYCZNE

(ii) Zakres N_1 jest PODRZĘDNY względem zakresu N_2

(iii) Zakres N_1 jest NADRZĘDNY względem zakresu N_2

RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW

Dla każdej pary nazw N_1 i N_2 istnieje pięć możliwych relacji między ich zakresami. Oznaczmy zakres nazwy N jako „Z[N]".

(i) Zakresy N_1 i N_2 są IDENTYCZNE

(ii) Zakres N_1 jest PODRZĘDNY względem zakresu N_2

(iii) Zakres N_1 jest NADRZĘDNY względem zakresu N_2

(iv) Zakresy N_1 i N_2 PRZECINAJĄ SIĘ

RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW

Dla każdej pary nazw N_1 i N_2 istnieje pięć możliwych relacji między ich zakresami. Oznaczmy zakres nazwy N jako „Z[N]".

(i) Zakresy N_1 i N_2 są IDENTYCZNE
(ii) Zakres N_1 jest PODRZĘDNY względem zakresu N_2
(iii) Zakres N_1 jest NADRZĘDNY względem zakresu N_2
(iv) Zakresy N_1 i N_2 PRZECINAJĄ SIĘ
(v) Zakresy N_1 i N_2 WYKLUCZAJĄ SIĘ

RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW

Dla każdej pary nazw N_1 i N_2 istnieje pięć możliwych relacji między ich zakresami. Oznaczmy zakres nazwy N jako „Z[N]".

(i) Zakresy N_1 i N_2 są IDENTYCZNE
(ii) Zakres N_1 jest PODRZĘDNY względem zakresu N_2
(iii) Zakres N_1 jest NADRZĘDNY względem zakresu N_2
(iv) Zakresy N_1 i N_2 PRZECINAJĄ SIĘ
(v) Zakresy N_1 i N_2 WYKLUCZAJĄ SIĘ

RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW

(i) $Z[N_1] = Z[N_2]$

RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW

Dla każdej pary nazw N_1 i N_2 istnieje pięć możliwych relacji między ich zakresami. Oznaczmy zakres nazwy N jako „Z[N]”.

(i) Zakresy N_1 i N_2 są IDENTYCZNE
(ii) Zakres N_1 jest PODRZĘDNY względem zakresu N_2
(iii) Zakres N_1 jest NADRZĘDNY względem zakresu N_2
(iv) Zakresy N_1 i N_2 PRZECINAJĄ SIĘ
(v) Zakresy N_1 i N_2 WYKLUCZAJĄ SIĘ

RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW

(i) $Z[N_1] = Z[N_2]$
(ii) $Z[N_1] \subsetneq Z[N_2]$

RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW

RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW

Dla każdej pary nazw N_1 i N_2 istnieje pięć możliwych relacji między ich zakresami. Oznaczmy zakres nazwy N jako „Z[N]".

(i) Zakresy N_1 i N_2 są IDENTYCZNE
(ii) Zakres N_1 jest PODRZĘDNY względem zakresu N_2
(iii) Zakres N_1 jest NADRZĘDNY względem zakresu N_2
(iv) Zakresy N_1 i N_2 PRZECINAJĄ SIĘ
(v) Zakresy N_1 i N_2 WYKLUCZAJĄ SIĘ

RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW

(i) $Z[N_1] = Z[N_2]$
(ii) $Z[N_1] \subsetneq Z[N_2]$
(iii) $Z[N_2] \subsetneq Z[N_1]$

RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW

Dla każdej pary nazw N_1 i N_2 istnieje pięć możliwych relacji między ich zakresami. Oznaczmy zakres nazwy N jako „Z[N]".

(i) Zakresy N_1 i N_2 są IDENTYCZNE
(ii) Zakres N_1 jest PODRZĘDNY względem zakresu N_2
(iii) Zakres N_1 jest NADRZĘDNY względem zakresu N_2
(iv) Zakresy N_1 i N_2 PRZECINAJĄ SIĘ
(v) Zakresy N_1 i N_2 WYKLUCZAJĄ SIĘ

RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW

(i) $\mathrm{Z}[N_1] = \mathrm{Z}[N_2]$
(ii) $\mathrm{Z}[N_1] \subsetneq \mathrm{Z}[N_2]$
(iii) $\mathrm{Z}[N_2] \subsetneq \mathrm{Z}[N_1]$
(iv) $\mathrm{Z}[N_1] \supset \subset \mathrm{Z}[N_2]$

RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW

Dla każdej pary nazw N_1 i N_2 istnieje pięć możliwych relacji między ich zakresami. Oznaczmy zakres nazwy N jako „Z[N]”.

(i) Zakresy N_1 i N_2 są IDENTYCZNE
(ii) Zakres N_1 jest PODRZĘDNY względem zakresu N_2
(iii) Zakres N_1 jest NADRZĘDNY względem zakresu N_2
(iv) Zakresy N_1 i N_2 PRZECINAJĄ SIĘ
(v) Zakresy N_1 i N_2 WYKLUCZAJĄ SIĘ

RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW

(i) $\mathrm{Z}[N_1] = \mathrm{Z}[N_2]$
(ii) $\mathrm{Z}[N_1] \subsetneq \mathrm{Z}[N_2]$
(iii) $\mathrm{Z}[N_2] \subsetneq \mathrm{Z}[N_1]$
(iv) $\mathrm{Z}[N_1] \supset\subset \mathrm{Z}[N_2]$
(v) $\mathrm{Z}[N_1] \cap \mathrm{Z}[N_2] = \emptyset$

RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW

Dla każdej pary nazw N_1 i N_2 istnieje pięć możliwych relacji między ich zakresami. Oznaczmy zakres nazwy N jako „Z[N]".

(i) Zakresy N_1 i N_2 są IDENTYCZNE

(ii) Zakres N_1 jest PODRZĘDNY względem zakresu N_2

(iii) Zakres N_1 jest NADRZĘDNY względem zakresu N_2

(iv) Zakresy N_1 i N_2 PRZECINAJĄ SIĘ

(v) Zakresy N_1 i N_2 WYKLUCZAJĄ SIĘ

RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW

(i) $Z[N_1] = Z[N_2]$

(ii) $Z[N_1] \subsetneq Z[N_2]$

(iii) $Z[N_2] \subsetneq Z[N_1]$

(iv) $Z[N_1] \supset \subset Z[N_2]$

(v) $Z[N_1] \cap Z[N_2] = \emptyset$

RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW - PRZYKŁADY

(i) N_1 =„stolica Polski”, N_2 = „największe miasto leżące nad Wisłą”.

RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW - PRZYKŁADY

(i) N_1 =„stolica Polski”, N_2 = „największe miasto leżące nad Wisłą”.
(ii) N_1 = „wściekła tchórzofretka”, N_2 = „tchórzofretka”

RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW - PRZYKŁADY

(i) N_1 =„stolica Polski”, N_2 = „największe miasto leżące nad Wisłą”.
(ii) N_1 = „wściekła tchórzofretka”, N_2 = „tchórzofretka”
(iii) N_1 = „tchórzofretka”, N_2 = „wściekła tchórzofretka”,

RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW - PRZYKŁADY

(i) N_1 =„stolica Polski”, N_2 = „największe miasto leżące nad Wisłą”.
(ii) N_1 = „wściekła tchórzofretka”, N_2 = „tchórzofretka”
(iii) N_1 = „tchórzofretka”, N_2 = „wściekła tchórzofretka”,
(iv) N_1 =„student psychologii”, N_2 = „kobieta”

RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW - PRZYKŁADY

(i) N_1 =„stolica Polski”, N_2 = „największe miasto leżące nad Wisłą”.
(ii) N_1 = „wściekła tchórzofretka”, N_2 = „tchórzofretka”
(iii) N_1 = „tchórzofretka”, N_2 = „wściekła tchórzofretka”,
(iv) N_1 =„student psychologii”, N_2 = „kobieta”
(v) N_1 = „żółw”, N_2 = „nie-żółw”

RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW: CO Z NAZWAMI PUSTYMI?

Zakres nazwy pustej nie zawiera żadnych przedmiotów - jest zatem ZBIOREM PUSTYM. ZBIÓR PUSTY JEST PODZBIOREM KAŻDEGO ZBIORU (zadanie domowe: udownodnij, że tak jest). W związku z tym zakres nazwy pustej zawsze zawarty jest w zakresie dowolnej nazwy NIEPUSTEJ.

RELACJE MIĘDZY ZAKRESAMI NAZW: CO Z NAZWAMI PUSTYMI?

Zakres nazwy pustej nie zawiera żadnych przedmiotów - jest zatem ZBIOREM PUSTYM. ZBIÓR PUSTY JEST PODZBIOREM KAŻDEGO ZBIORU (zadanie domowe: udownodnij, że tak jest). W związku z tym zakres nazwy pustej zawsze zawarty jest w zakresie dowolnej nazwy NIEPUSTEJ.

NIE MYL RODZAJÓW ZBIORÓW!

Jak jest relacja między zakresem nazw „Warszawa” i „Żoliborz”, „Juliusz Cezar”, „głowa Juliusza Cezara”?

Relacje między zakresami nazw: co z nazwami pustymi?

Zakres nazwy pustej nie zawiera żadnych przedmiotów - jest zatem ZBIOREM PUSTYM. ZBIÓR PUSTY JEST PODZBIOREM KAŻDEGO ZBIORU (zadanie domowe: udownodnij, że tak jest). W związku z tym zakres nazwy pustej zawsze zawarty jest w zakresie dowolnej nazwy NIEPUSTEJ.

Nie myl rodzajów zbiorów!

Jak jest relacja między zakresem nazw „Warszawa" i „Żoliborz", „Juliusz Cezar", „głowa Juliusza Cezara"?
Aby odpowiedzieć na to pytanie zastanów się, czy o (wszystkich/niektórych) przedmiotach z zakresu jednej nazwy można prawdziwie orzec drugą nazwę.

TEORIA DEFINICJI

Wiele (choć nie wszystkie) z definicji ma ogólna postać:
$A =_{df.} B$
Gdzie A i B są nazwami („A” nazywane jest tu „DEFINIENDUM” (*tym, co definiowane*), „B” - „DEFINIENSEM” (*tym, przy czego pomocy definiujemy*)).

TEORIA DEFINICJI

Wiele (choć nie wszystkie) z definicji ma ogólna postać:
A $=_{df.}$ B
Gdzie A i B są nazwami („A" nazywane jest tu „DEFINIENDUM" (*tym, co definiowane*), „B" - „DEFINIENSEM" (*tym, przy czego pomocy definiujemy*)).

PRZYKŁADY

Abażur $=_{df.}$ osłona na lampę.
Kawaler $=_{df.}$ nieżonaty mężczyzna, który nie jest wdowcem.
Charakter $=_{df.}$ zespół pozytywnych, trwałych, zdobytych dyspozycji psychicznych.

WARUNEK KONIECZNY POPRAWNOŚCI DEFINICJI

Definicje o takiej postaci, które zdają sprawę z funkcjonowania pewnego terminu (w jakimś języku lub jakiejś teorii) są rodzajem tzw. DEFINICJI SPRAWOZDAWCZYCH (ich przeciwieństwem są tzw. DEFINICJE ARBITRALNE, które nadają znaczenie jakiemuś terminowi lub tzw. DEFINICJE REGULUJĄCE, które modyfikują znaczenie danego terminu [w jakimś języku lub jakiejś teorii]).Jednym z warunków koniecznych (ale nie wystarczających!) poprawności DEFINICJI SPRAWOZDAWCZYCH o takiej postaci jest to, żeby zakresy DEFINIENDUM i DEFINIENSA były identyczne.

DEFINICJA ZA SZEROKA

Zakres definiendum zawiera się w zakresie definiensa.

DEFINICJA ZA SZEROKA

Zakres definiendum zawiera się w zakresie definiensa.

PRZYKŁAD

Amnestia $=_{df.}$ akt łaski polegający na darowaniu lub złagodzeniu kary prawomocnie orzeczonej za przestępstwo.

DEFINICJA ZA WĄSKA

Zakres definiensa zawiera się w zakresie definiendum.

DEFINICJA ZA WĄSKA

Zakres definiensa zawiera się w zakresie definiendum.

PRZYKŁAD

Amnestia $=_{df.}$ zbiorowy akt łaski polegający na darowaniu lub złagodzeniu kar prawomocnie orzeczonych za przestępstwa koprupcyjne.

DEFINICJA ZA SZEROKA I ZA WĄSKA

Zakresy definiendum i definiensa się krzyżują.

DEFINICJA ZA SZEROKA I ZA WĄSKA

Zakresy definiendum i definiensa się krzyżują.

PRZYKŁAD

Amnestia $=_{df.}$ akt łaski polegający na darowaniu lub złagodzeniu kary prawomocnie orzeczonej za przestępstwo koprupcyjne.

PSEUDODEFINICJA

Zakresy definiendum i definiensa są rozłączne.

PSEUDODEFINICJA

Zakresy definiendum i definiensa są rozłączne.

PRZYKŁAD

Amnestia $=_{df.}$ wyrok za przestępstwo koprupcyjne.

KLASYFIKACJA

Klasyfikacja – jest to WYCZERPUJĄCY i ZAMKNIĘTY podział zakresu danej nazwy (lub: zbioru w ogólności) na podzbiory (zakresy pewnych innych nazw), które są NIEPUSTE i ROZŁĄCZNE (można myśleć o klasyfikacji jak o podziale dokonywanym na zakresie pewnego pojęcia, odwołującym się do innych pojęć – wedle, których dokonujemy wyboru członów podziału).

KLASYFIKACJA I TYPOLOGIA

KLASYFIKACJA

Klasyfikacja – jest to WYCZERPUJĄCY i ZAMKNIĘTY podział zakresu danej nazwy (lub: zbioru w ogólności) na podzbiory (zakresy pewnych innych nazw), które są NIEPUSTE i ROZŁĄCZNE (można myśleć o klasyfikacji jak o podziale dokonywanym na zakresie pewnego pojęcia, odwołującym się do innych pojęć – wedle, których dokonujemy wyboru członów podziału).

RODZINA ZBIORÓW

Rodzina zbiorów – zbiór, którego elementami są zbiory.

WYCZERPUJĄCY PODZIAŁ ZBIORU

Niech K(A) = rodzina zbiorów: zbiór, którego elementami są podzbiory A.

WYCZERPUJĄCY PODZIAŁ ZBIORU

Niech K(A) = rodzina zbiorów: zbiór, którego elementami są podzbiory A. Podział zbioru A – K(A) jest WYCZERPUJĄCY, gdy dla każdego x należącego do A istnieje k należące do K(A) takie, że x należy do k. INTUICYJNIE: wszystkie elementy zbioru A należą, do któregoś z członów klasyfikacji.

WYCZERPUJĄCY PODZIAŁ ZBIORU

Niech K(A) = rodzina zbiorów: zbiór, którego elementami są podzbiory A. Podział zbioru A – K(A) jest WYCZERPUJĄCY, gdy dla każdego x należącego do A istnieje k należące do K(A) takie, że x należy do k.
INTUICYJNIE: wszystkie elementy zbioru A należą, do któregoś z członów klasyfikacji.

ZAMKNIĘTY [ADEKWATNY] PODZIAŁ ZBIORU

Podział zbioru A – K(A) jest ZAMKNIĘTY [ADEKWATNY], gdy nie ma takiego x należącego do jakiegoś k (należącego do K(A)), który by nie był elementem A.
INTUICYJNIE: w klasyfikacji nie ma - poza elementami zbioru A - żadnych innych elementów.

WYCZERPUJĄCY i ZAMKNIĘTY PODZIAŁ ZBIORU

$\cup K(A) = A$

NIEPUSTOŚĆ

Żaden z elementów K(A) nie jest zbiorem pustym.

NIEPUSTOŚĆ

Żaden z elementów K(A) nie jest zbiorem pustym.
Formalnie: dla dowolnego $x \in$ K(A): $x \neq \emptyset$

NIEPUSTOŚĆ

Żaden z elementów K(A) nie jest zbiorem pustym.
Formalnie: dla dowolnego $x \in$ K(A): $x \neq \emptyset$

ROZŁĄCZNOŚĆ

Żadne dwa elementy K(A) nie mają części wspólnej.

NIEPUSTOŚĆ

Żaden z elementów K(A) nie jest zbiorem pustym.

Formalnie: dla dowolnego $x \in$ K(A): $x \neq \emptyset$

ROZŁĄCZNOŚĆ

Żadne dwa elementy K(A) nie mają części wspólnej.

Formalnie: dla dowolnych x i $y \in$ K(A): $x \cap y = \emptyset$.

Klasyfikacja DE IURE

Każda klasyfikacja, która jest Z KONIECZNOŚCI rozłączna.

KLASYFIKACJA DE IURE I KLASYFIKACJA DE FACTO

Klasyfikacja DE IURE

Każda klasyfikacja, która jest Z KONIECZNOŚCI rozłączna.

Klasyfikacja DE FACTO

Każda klasyfikacja, która jest rozłączna faktycznie, jednak w wypadku której mogłoby się okazać, że nie jest rozłączna (tzn. elementy należące do jednego z członów podziału mógłyby faktycznie posiadać własności decydujące o przynależności, do innego z członów podziału).

PRZYKŁAD - KLASYFIKACJA DE FACTO

Niech A = zbiór osób obecnych na sali w czasie wykładu dra TC.

PRZYKŁAD - KLASYFIKACJA DE FACTO

Niech A = zbiór osób obecnych na sali w czasie wykładu dra TC.
Niech K(A) = {{*x*: *x* jest osobą posiadającą kota},{ *x*: *x* jest osobą posiadającą psa}}

PRZYKŁAD - KLASYFIKACJA DE FACTO

Niech A = zbiór osób obecnych na sali w czasie wykładu dra TC.
Niech K(A) = {{x: x jest osobą posiadającą kota},{ x: x jest osobą posiadającą psa}}

Załóżmy, że faktycznie na sali są sami kociarze/kociarki i psiarze/psiarki oraz że żaden psiarz/psiarka nie jest kociarzem/kociarką (ani na odwrót). Wówczas nasza klasyfikacja jest DE FACTO – mogłoby się bowiem okazać (choć faktycznie się nie okazało), że ktoś na sali ma i psa i kota.

KLASYFIKACJA DE IURE I KLASYFIKACJA DE FACTO

PRZYKŁAD - KLASYFIKACJA DE IURE

Niech K(A) = {{x: x jest posiadaczem/posiadaczką prawa jazdy kategorii B}, { x: x nie jest posiadaczem/posiadaczką prawa jazdy kategorii B }}

lub:

Niech K(A) = {{x: x jest słuchaczem},{x: x jest wykładowcą}}

Wówczas są to klasyfikacje DE IURE. Bez względu na to, jak sprawy by się nie miały:

- jeśli na sali są jakieś osoby, wiadomo że żadna z nich nie może być zarazem posiadaczem prawa jazdy kategorii B jak i nie posiadać prawa jazdy tej kategorii,

– jeśli na sali jest i prowadzący i słuchacze, wówczas grupy te są rozłączne.

KLASYFIKACJA WIELOSTOPNIOWA

Bardzo często klasyfikacja ma charakter wielostopniowy - tzn. dalszej klasyfikacji poddawane są wszystkie lub niektóre elementy rodziny zbiorów K(A). Otrzymane w ten sposób elementy nowej rodziny zbiorów K(B) (dla B $\in$ K(A)) same mogą podlegać klasyfikacji itd.

KLASYFIKACJA WIELOSTOPNIOWA

Bardzo często klasyfikacja ma charakter wielostopniowy - tzn. dalszej klasyfikacji poddawane są wszystkie lub niektóre elementy rodziny zbiorów K(A). Otrzymane w ten sposób elementy nowej rodziny zbiorów K(B) (dla B $\in$ K(A)) same mogą podlegać klasyfikacji itd.

KLASYFIKACJA WIELOSTOPNIOWA - DEFINICJA

Klasyfikacją wielostopniową zakresu (A) danej nazwy jest skończony zbiór klasyfikacji $\{c_1,...c_n\}$ taki, że:

KLASYFIKACJA WIELOSTOPNIOWA

Bardzo często klasyfikacja ma charakter wielostopniowy - tzn. dalszej klasyfikacji poddawane są wszystkie lub niektóre elementy rodziny zbiorów K(A). Otrzymane w ten sposób elementy nowej rodziny zbiorów K(B) (dla B $\in$ K(A)) same mogą podlegać klasyfikacji itd.

KLASYFIKACJA WIELOSTOPNIOWA - DEFINICJA

Klasyfikacją wielostopniową zakresu (A) danej nazwy jest skończony zbiór klasyfikacji $\{c_1, \ldots c_n\}$ taki, że:
(1) K(A) $\in \{c_1, \ldots c_n\}$

KLASYFIKACJA WIELOSTOPNIOWA

Bardzo często klasyfikacja ma charakter wielostopniowy - tzn. dalszej klasyfikacji poddawane są wszystkie lub niektóre elementy rodziny zbiorów K(A). Otrzymane w ten sposób elementy nowej rodziny zbiorów K(B) (dla B $\in$ K(A)) same mogą podlegać klasyfikacji itd.

KLASYFIKACJA WIELOSTOPNIOWA - DEFINICJA

Klasyfikacją wielostopniową zakresu (A) danej nazwy jest skończony zbiór klasyfikacji $\{c_1,...c_n\}$ taki, że:

(1) K(A) $\in \{c_1,...c_n\}$

(2) Jeśli $c_j \in \{c_1,...c_n\}$ oraz $c_j \neq$ K(A), to istnieje $c_i \in \{c_1,...c_n\}$, że dla pewnego $x \in c_i$: K(x) $= c_j$.

KLASYFIKACJA WIELOSTOPNIOWA

KLASYFIKACJA WIELOSTOPNIOWA

Bardzo często klasyfikacja ma charakter wielostopniowy - tzn. dalszej klasyfikacji poddawane są wszystkie lub niektóre elementy rodziny zbiorów K(A). Otrzymane w ten sposób elementy nowej rodziny zbiorów K(B) (dla B $\in$ K(A)) same mogą podlegać klasyfikacji itd.

KLASYFIKACJA WIELOSTOPNIOWA - DEFINICJA

Klasyfikacją wielostopniową zakresu (A) danej nazwy jest skończony zbiór klasyfikacji $\{c_1,\ldots c_n\}$ taki, że:
(1) $\mathrm{K(A)} \in \{c_1,\ldots c_n\}$
(2) Jeśli $c_j \in \{c_1,\ldots c_n\}$ oraz $c_j \neq \mathrm{K(A)}$, to istnieje $c_i \in \{c_1,\ldots c_n\}$, że dla pewnego $x \in c_i$: $\mathrm{K}(x) = c_j$.
(3) Dla dowolnych c_i oraz $c_j \in \{c_1,\ldots c_n\}$: jeśli $c_i \neq c_j$, to $\cup\, c_i \neq \cup\, c_j$.

KLASYFIKACJA WIELOSTOPNIOWA

ELEMENT TERMINALNY KLASYFIKACJI WIELOSTOPNIOWEJ

x jest elementem terminalnym (ostatecznym, dolnym) klasyfikacji wielostopniowej, gdy:
pause
(1) x jest elementem jednej z klasyfikacji ze zbioru $\{c_1, ... c_n\}$

KLASYFIKACJA WIELOSTOPNIOWA

ELEMENT TERMINALNY KLASYFIKACJI WIELOSTOPNIOWEJ

x jest elementem terminalnym (ostatecznym, dolnym) klasyfikacji wielostopniowej, gdy:

pause

(1) x jest elementem jednej z klasyfikacji ze zbioru $\{c_1, \ldots c_n\}$

(2) w zbiorze $\{c_1, \ldots c_n\}$ nie ma takiej klasyfikacji c_j, która byłaby klasyfikacją x.

KLASYFIKACJA WIELOSTOPNIOWA

ELEMENT TERMINALNY KLASYFIKACJI WIELOSTOPNIOWEJ

x jest elementem terminalnym (ostatecznym, dolnym) klasyfikacji wielostopniowej, gdy:
pause
(1) x jest elementem jednej z klasyfikacji ze zbioru $\{c_1, \ldots c_n\}$
(2) w zbiorze $\{c_1, \ldots c_n\}$ nie ma takiej klasyfikacji c_j, która byłaby klasyfikacją x.

OBSERWACJA

Rodzina zbiorów, której elementami są wszystkie elementy terminalne danej klasyfikacji wielostopniowej zakresu (A) danej nazwy jest klasyfikacją zakresu (A) tej nazwy.

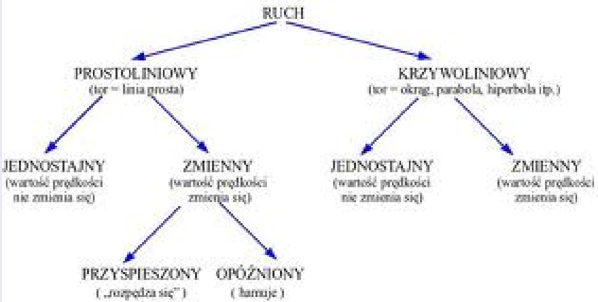
KLASYFIKACJA NIEWIELOSTOPNIOWA

PRZYKŁAD

IQ wg skali Bineta	Interpretacja	IQ wg skali Wechslera
>148	Inteligencja bardzo wysoka	>145
133 - 148	Inteligencja wysoka	131 - 145
117 - 132	Inteligencja powyżej przeciętnej	116 - 130
84 - 116	Inteligencja przeciętna	85-115
68 - 83	Inteligencja niższa niż przeciętna	70 - 84
<68	Upośledzenie umysłowe	<70

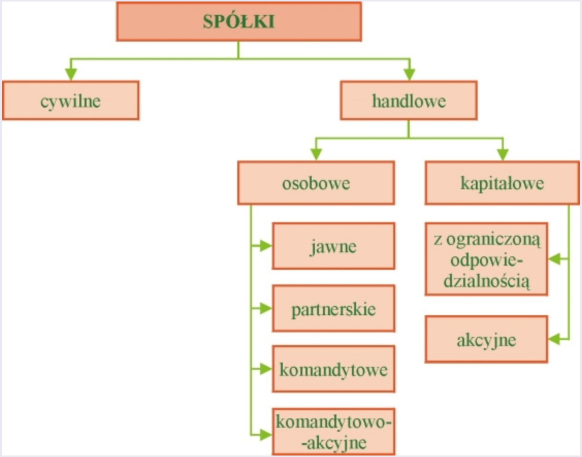
KLASYFIKACJA WIELOSTOPNIOWA

PRZYKŁAD 1



KLASYFIKACJA WIELOSTOPNIOWA

PRZYKŁAD 2



TYPOLOGIA

Jest to wyczerpujący i zamknięty podział zakresu danej nazwy, który nie spełnia kryterium ROZŁĄCZNOŚCI. Zazwyczaj (choć nie zawsze) typologia dotyczy stopniowalnych cech przedmiotów.

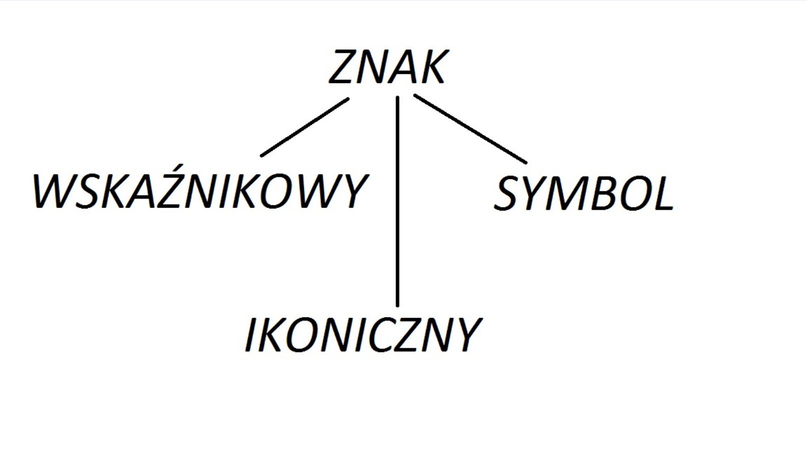
TYPOLOGIA

Jest to wyczerpujący i zamknięty podział zakresu danej nazwy, który nie spełnia kryterium ROZŁĄCZNOŚCI. Zazwyczaj (choć nie zawsze) typologia dotyczy stopniowalnych cech przedmiotów.

TYP

[W jednym z rozumień:] zbiór przedmiotów dobranych ze względu na podobieństwo (pod jakimś względem) do pewnego przedmiotu wzorcowego.

PRZYKŁAD 1 - TYPOLOGIA ZNAKÓW CHARLESA PEIRCE'A (1839-1914)



PRZYKŁAD 2 - TYPOLOGIA ZNAKÓW ROGERA BACONA (1214-1292)

1. ZNAKI NATURALNE
1.1 znaczące przez inferencję, wynikanie, współwystępowanie (współistnienie);
1.1.1 znaczące z konieczności
1.1.1.1 coś teraźniejszego (potężne muskuły › siła)
1.1.1.2 coś przeszłego (mleko w piersiach › narodziny dziecka)
1.1.1.3 coś przyszłego (zachód słońca› noc)
1.1.2 znaczące z pewnym prawdopodobieństwem
1.1.2.1 coś teraźniejszego (bycie matką › miłość)
1.1.2.2 coś przyszłego (mokra ziemia › deszcz)
1.1.2.3 coś przyszłego (czarne chmury › deszcz)
1.2 znaczące coś przez podobieństwo lub konfigurację (obrazki, mapy)
1.3 znaczące coś przez pozostawanie w związku przyczynowym (ślady › zwierzyna)

PRZYKŁAD 2 - TYPOLOGIA ZNAKÓW ROGERA BACONA (1214-1292) cd.

2. ZNAKI POCHODZĄCE OD DUSZY LUB PRZEZ NIĄ KIEROWANE

2.1 znaczące coś instynktownie (nieumyślnie) (krzyk › ból; śmiech › radość)

2.2 znaczące coś umyślnie (słowa);

2.3. wypadki mieszane (np. okrzyk “Boli!”).

PRZYKŁAD 3 - KLASYCZNA KONCEPCJA TEMPERAMENTU

TYPOLOGIA O CECHACH KLASYFIKACJI

Jest to typologia wielostopniowa, w wypadku której przynajmniej jeden z członów podziału (któregoś stopnia) jest klasyfikacją.

TYPOLOGIA O CECHACH KLASYFIKACJI

Jest to typologia wielostopniowa, w wypadku której przynajmniej jeden z członów podziału (któregoś stopnia) jest klasyfikacją.

PRZYKŁAD

Podział zbioru osób obecnych na wykładzie (ściśle rzecz biorąc: zakresu nazwy „osoba obecna na wykładzie") na wykładowcę i słuchaczy, oraz podział zbioru słuchaczy ze względu na cechę bycia osobą (mniej lub bardziej) nieśmiałą.

PARA UPORZĄDKOWANA

Kolejność elementów w zwykłych zbiorach (pojętych dystrybutywnie) jest bez znaczenia, tzn. $\{x, y\} = \{y, x\}$. Dlatego wprowadza się pojęcie PARY UPORZĄDKOWANEJ, tzn. zbioru dwuelementowego, w wypadku którego kolejność elementów jest istotna. Parę uporzdkowaną oznaczamy jako: $\langle x, y\rangle$. Parą uporządkowana spełnia następujące warunki:

PARA UPORZĄDKOWANA

Kolejność elementów w zwykłych zbiorach (pojętych dystrybutywnie) jest bez znaczenia, tzn. $\{x, y\} = \{y, x\}$. Dlatego wprowadza się pojęcie PARY UPORZĄDKOWANEJ, tzn. zbioru dwuelementowego, w wypadku którego kolejność elementów jest istotna. Parę uporzdkowaną oznaczamy jako: $\langle x, y\rangle$. Parą uporządkowana spełnia następujące warunki:
1. $\langle x, y\rangle \neq \langle y, x\rangle$, o ile $x \neq y$.
2. jeśli $\langle x, y\rangle = \langle a, b\rangle$, to $x = a$ oraz $y = b$.

PARA UPORZĄDKOWANA

PARA UPORZĄDKOWANA

Kolejność elementów w zwykłych zbiorach (pojętych dystrybutywnie) jest bez znaczenia, tzn. $\{x, y\} = \{y, x\}$. Dlatego wprowadza się pojęcie PARY UPORZĄDKOWANEJ, tzn. zbioru dwuelementowego, w wypadku którego kolejność elementów jest istotna. Parę uporzdkowaną oznaczamy jako: $\langle x, y\rangle$. Parą uporządkowana spełnia następujące warunki:
1. $\langle x, y\rangle \neq \langle y, x\rangle$, o ile $x \neq y$.
2. jeśli $\langle x, y\rangle = \langle a, b\rangle$, to $x = a$ oraz $y = b$.

WIENERA-KURATOWSKIEGO DEFINICJA PARY UPORZĄDKOWANEJ

$\langle x, y\rangle =_{df.} \{\{x\}, \{x, y\}\}$
Do przemyślenia: wykaż, że definicja ta spełnia, nałożone na definicję pary uporządkowanej, warunki 1 i 2.

ILOCZYN KARTEZJAŃSKI ZBIORÓW

Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B („A $\times$ B”) nazywamy zbiór wszytskich par uporządkowanych, których pierwszym elementem jest jakiś element zbioru A, a drugim elementem - pewien element zbioru B. Bardziej formalnie:

$\mathrm{A} \times \mathrm{B} =_{df.} \{\langle x, y\rangle : x \in \mathrm{A} \text{ oraz } y \in \mathrm{B}\}$

ILOCZYN KARTEZJAŃSKI

ILOCZYN KARTEZJAŃSKI ZBIORÓW

Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B („A $\times$ B") nazywamy zbiór wszytskich par uporządkowanych, których pierwszym elementem jest jakiś element zbioru A, a drugim elementem - pewien element zbioru B. Bardziej formalnie:

$A \times B =_{df.} \{\langle x, y\rangle : x \in A \text{ oraz } y \in B\}$

PRZYKŁAD

{Warszawa, Toruń, Kraków} $\times$ {Wisła} =
{⟨Warszawa, Wisła⟩, ⟨Toruń, Wisła⟩, ⟨Kraków, Wisła⟩}

KONIEC