

Paweł Stacewicz (Politechnika Warszawska)

## „O pojęciu nieobliczalności. Kontekst matematyczno-informatyczny”.

Abstrakt referatu na seminarium PTS (22-01-2016)

1. W kontekstach matematyczno-informatycznych **nieobliczalnymi** (inaczej: algorytmicznie niedostępnymi) nazywa się: a) liczby, b) funkcje, c) problemy. W referacie skupię się na znaczeniach a i c, które będę rozpatrywał w ramach klasycznego, turingowskiego modelu obliczeń (*obliczalne = obliczalne za pomocą maszyn Turinga*).

2. **Liczby nieobliczalne** – zdefiniowane przez Alana Turinga w pracy „*On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem*” (1936) – są to takie niewymierne liczby rzeczywiste, w przypadku których nie istnieje algorytm wyznaczania ich kolejnych cyfr rozwinięcia np. dziesiętnego (inaczej: w turingowskim modelu obliczeń liczb takich nie można obliczyć z dowolną zadaną dokładnością).

Klasa liczb nieobliczalnych (NOBL) jest **nieskończona i nieprzeliczalna** (ma moc *continuum*), nie zawiera jednak wszystkich liczb niewymiernych. Na przykład, do klasy NOBL nie należą liczby  $\pi$  i  $e$  (które są liczbami niewymiernymi, choć obliczalnymi).

3. **Problemy** nieobliczalne dzielą się na:

a) nieobliczalne **praktycznie** – w ich przypadku nie istnieją rozwiązujące je algorytmy o dostatecznie niskiej złożoności czasowej (najlepsze algorytmy mają zł. wykładniczą),

b) nieobliczalne **zasadniczo** – w ich przypadku nie istnieje żaden algorytm, który pozwoliłby rozwiązać dany problem we wszystkich przypadkach szczególnych.

(charakterystyki powyższe ponownie dotyczą turingowskiego modelu obliczeń cyfrowych)  
Znany informatyczny przykład zagadnienia typu a to *problem komiwojażera*; zaś zagadnienia typu b – to problem rozwiązywalności *równań diofantycznych*.

4. Liczby nieobliczalne i problemy zasadniczo nieobliczalne są ze sobą na różne sposoby **powiązane**. Dla przykładu: i) pewne liczby nieobliczalne (np. liczbę  $\Omega$  Chaitina) definiuje się za pomocą problemów nieobliczalnych (np. problemu stopu maszyny Turinga); ii) liczbowym kodom hipotetycznych rozwiązań problemów nieobliczalnych (takim kodem jest np. kod binarny programu komputerowego) odpowiadają pewne liczby nieobliczalne.

5. Matematycznie dowiedziony fakt istnienia problemów nieobliczalnych pobudza do pytań o strategię ich **przewycięzania**. Po części są to pytania informatyczne (*jak informatycy radzą sobie z takimi problemami?*), a po części kognitywistyczne (*jak ludzki umysł, niekoniecznie posługujący się komputerem, stara się tego typu problemy przewycięzać?*).

Inna grupa pytań dotyczy granic ludzkiej wiedzy, a zatem przynależą one do sfery **filozofii** (*czy wiedza pewnego typu może pozostać zasadniczo niedostępna?*).

W referacie będę rozważał te pytania, zaś szczegóły techniczne przedstawię w sposób poglądowy (zrozumiały dla niespecjalistów).