O sile różnych własności pojęcia prawdy

Mateusz Łełyk, Bartosz Wcisło

Instytut Filozofii, Uniwersytet Warszawski

Seminarium Znak – Język – Rzeczywistość,
Warszawa, 1 kwietnia 2016

Plan referatu

Podstawowa motywacja: usiłujemy zanalizować własność 'x jest zdaniem prawdziwym'.

Podstawowa motywacja: usiłujemy zanalizować własność 'x jest zdaniem prawdziwym'.

Omawiany nurt badań zrodził się z prób formalizacji tez wygłaszanych w ramach debat nad deflacjonizmem.

Pytanie zasadnicze

Jakie własności predykatu prawdy umożliwiają nam wyciąganie wniosków dotyczących pozasemantycznych aspektów rzeczywistości?

Podstawowa definicja

Przez **teorię prawdy** rozumiemy rozszerzenie pewnej teorii bazowej B (zawierającej teorię składni) sformułowane w języku wzbogaconym o predykat jednoargumentowy $T(x)$,

Podstawowa definicja

Przez **teorię prawdy** rozumiemy rozszerzenie pewnej teorii bazowej B (zawierającej teorię składni) sformułowane w języku wzbogaconym o predykat jednoargumentowy $T(x)$, które dowodzi wszystkich podstawień równoważności Tarskiego dla języka teorii B, tzn. wszystkich zdań postaci:

$$T(\ulcorner \phi \urcorner) \equiv \phi, \qquad \text{(T)}$$

Podstawowa definicja

Przez **teorię prawdy** rozumiemy rozszerzenie pewnej teorii bazowej B (zawierającej teorię składni) sformułowane w języku wzbogaconym o predykat jednoargumentowy $T(x)$, które dowodzi wszystkich podstawień równoważności Tarskiego dla języka teorii B, tzn. wszystkich zdań postaci:

$$T(\ulcorner \phi \urcorner) \equiv \phi, \tag{T}$$

gdzie ϕ przebiega zdania języka teorii B, a $\ulcorner \phi \urcorner$ oznacza ich kody Gödlowskie.

Uzasadnienie wyboru formalizmu

Dla uproszczenia zakładamy, że teoria prawdy składa się z części ściśle semantycznej i pozasemantycznej, którą nazywamy teorią bazową.

Uzasadnienie wyboru formalizmu

Dla uproszczenia zakładamy, że teoria prawdy składa się z części ściśle semantycznej i pozasemantycznej, którą nazywamy teorią bazową. B ma reprezentować naszą wiedzę pozasemantyczną, przede wszystkim teorię składni.

Uzasadnienie wyboru formalizmu

Dla uproszczenia zakładamy, że teoria prawdy składa się z części ściśle semantycznej i pozasemantycznej, którą nazywamy teorią bazową. B ma reprezentować naszą wiedzę pozasemantyczną, przede wszystkim teorię składni.
Chcemy zrozumieć, jak zmienia się treść teorii prawdy, gdy dodajemy do niej nowe informacje o czysto semantycznych charakterze.

Kluczowe pojęcia

Niech $\mathrm{Th}_1, \mathrm{Th}_2$ będą dowolnymi dwiema teoriami (np. teorią B i naszą pełną teorią prawdy).

Kluczowe pojęcia

Niech $\mathrm{Th}_1, \mathrm{Th}_2$ będą dowolnymi dwiema teoriami (np. teorią B i naszą pełną teorią prawdy). Mówimy, że Th_2 jest **konserwatywna** nad Th_1, jeśli dla dowolnego zdania ϕ z języka teorii Th_1

Kluczowe pojęcia

Niech $\mathrm{Th}_1, \mathrm{Th}_2$ będą dowolnymi dwiema teoriami (np. teorią B i naszą pełną teorią prawdy). Mówimy, że Th_2 jest **konserwatywna** nad Th_1, jeśli dla dowolnego zdania ϕ z języka teorii Th_1

$$\mathrm{Th}_1 \vdash \phi \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \mathrm{Th}_2 \vdash \phi.$$

Przykłady

Zwykle przyjmujemy, że B to arytmetyka Peana PA.

- Teorię tę dość dokładnie przebadano, więc stanowi wygodne tło do porównywania różnych aksjomatów charakteryzujących pojęcie prawdy.

Przykłady

Zwykle przyjmujemy, że B to arytmetyka Peana PA.

- Teorię tę dość dokładnie przebadano, więc stanowi wygodne tło do porównywania różnych aksjomatów charakteryzujących pojęcie prawdy.
- Nie rodzi tylu kłopotów filozoficznych, co wybór teorii mnogości.

Przykłady

Zwykle przyjmujemy, że B to arytmetyka Peana PA.

- Teorię tę dość dokładnie przebadano, więc stanowi wygodne tło do porównywania różnych aksjomatów charakteryzujących pojęcie prawdy.
- Nie rodzi tylu kłopotów filozoficznych, co wybór teorii mnogości.
- Tak naprawdę, od wyboru teorii bazowej niezbyt wiele zależy.

Przykłady

Podstawową teorię prawdy TB^{-} można zdefiniować w następujący sposób:

Przykłady

Podstawową teorię prawdy TB^- można zdefiniować w następujący sposób: bierzemy wszystkie aksjomaty PA i dodajemy wszystkie zdania postaci:

$$T(\ulcorner \phi \urcorner) \equiv \phi,$$

gdzie ϕ jest zdaniem arytmetycznym.

Przykłady

Podstawową teorię prawdy TB^- można zdefiniować w następujący sposób: bierzemy wszystkie aksjomaty PA i dodajemy wszystkie zdania postaci:

$$T(\ulcorner \phi \urcorner) \equiv \phi,$$

gdzie ϕ jest zdaniem arytmetycznym.
O TB^- można myśleć jako o formalizacji własności „dyskwotacji” pojęcia prawdy.

Przykłady

Inną podstawową zasadą jest kompozycyjność predykatu prawdy.

Przykłady

Inną podstawową zasadą jest kompozycyjność predykatu prawdy. Teorię CT^- definiujemy jako rozszerzenie arytmetyki Peana PA o następujące aksjomaty:

1. $\forall x, y \ \ (\mathrm{ClTerm}(x) \wedge \mathrm{ClTerm}(y)) \longrightarrow T(\ulcorner x = y \urcorner) \equiv \mathrm{val}(x) = \mathrm{val}(y).$

Przykłady

Inną podstawową zasadą jest kompozycyjność predykatu prawdy. Teorię CT^- definiujemy jako rozszerzenie arytmetyki Peana PA o następujące aksjomaty:

1. $\forall x, y \ (\mathrm{ClTerm}(x) \wedge \mathrm{ClTerm}(y)) \longrightarrow T(\ulcorner x = y \urcorner) \equiv \mathrm{val}(x) = \mathrm{val}(y)$.
2. $\forall x, y \ (\mathrm{Sent}(x) \wedge \mathrm{Sent}(y)) \longrightarrow T(\ulcorner x \wedge y \urcorner) \equiv T(x) \wedge T(y)$.

Przykłady

Inną podstawową zasadą jest kompozycyjność predykatu prawdy. Teorię CT^{-} definiujemy jako rozszerzenie arytmetyki Peana PA o następujące aksjomaty:

1. $\forall x, y \ \ (\mathrm{ClTerm}(x) \wedge \mathrm{ClTerm}(y)) \longrightarrow T(\ulcorner x = y \urcorner) \equiv \mathrm{val}(x) = \mathrm{val}(y).$
2. $\forall x, y \ \ (\mathrm{Sent}(x) \wedge \mathrm{Sent}(y)) \longrightarrow T(\ulcorner x \wedge y \urcorner) \equiv T(x) \wedge T(y).$
3. $\forall x \ \ \mathrm{Sent}(x) \longrightarrow T(\ulcorner \neg x \urcorner) \equiv \neg T(x).$

Przykłady

Inną podstawową zasadą jest kompozycyjność predykatu prawdy. Teorię CT^- definiujemy jako rozszerzenie arytmetyki Peana PA o następujące aksjomaty:

1. $\forall x, y \ \ (\mathrm{ClTerm}(x) \wedge \mathrm{ClTerm}(y)) \longrightarrow T(\ulcorner x = y \urcorner) \equiv \mathrm{val}(x) = \mathrm{val}(y)$.
2. $\forall x, y \ \ (\mathrm{Sent}(x) \wedge \mathrm{Sent}(y)) \longrightarrow T(\ulcorner x \wedge y \urcorner) \equiv T(x) \wedge T(y)$.
3. $\forall x \ \ \mathrm{Sent}(x) \longrightarrow T(\ulcorner \neg x \urcorner) \equiv \neg T(x)$.
4. $\forall x, y \ \ (\mathrm{Var}(x) \wedge \mathrm{Form}(y)) \longrightarrow T(\ulcorner \exists x \ y \urcorner) \equiv \exists x \ T(\ulcorner y(x) \urcorner)$.

Przykłady

Osobiście zapisalibyśmy aksjomaty CT^{-} w następujący sposób przejrzysty a niepoprawny:

1. $\forall s, t \quad T(s = t) \equiv s^{\circ} = t^{\circ}.$

Przykłady

Osobiście zapisalibyśmy aksjomaty CT^- w następujący sposób przejrzysty a niepoprawny:

1. $\forall s, t \quad T(s = t) \equiv s^\circ = t^\circ$.
2. $\forall \phi, \psi \quad T(\phi \wedge \psi) \equiv T\phi \wedge T\psi$.

Przykłady

Osobiście zapisalibyśmy aksjomaty CT^- w następujący sposób przejrzysty a niepoprawny:

1. $\forall s, t \quad T(s = t) \equiv s^\circ = t^\circ.$
2. $\forall \phi, \psi \quad T(\phi \wedge \psi) \equiv T\phi \wedge T\psi.$
3. $\forall \phi \quad T(\neg \phi) \equiv \neg T\phi.$

Przykłady

Osobiście zapisalibyśmy aksjomaty CT^- w następujący sposób przejrzysty a niepoprawny:

1. $\forall s, t \ \ T(s = t) \equiv s^\circ = t^\circ.$
2. $\forall \phi, \psi \ \ T(\phi \wedge \psi) \equiv T\phi \wedge T\psi.$
3. $\forall \phi \ \ T(\neg \phi) \equiv \neg T\phi.$
4. $\forall v, \phi(v) \ \ T(\exists v \ \phi(v)) \equiv \exists x \ T(\phi(\underline{x})).$

Kluczowe pojęcia

Niech $\mathrm{Th}_1, \mathrm{Th}_2$ będą dowolnymi dwiema teoriami (np. teorią bazową B i teorią prawdy).

Kluczowe pojęcia

Niech $\mathrm{Th}_1, \mathrm{Th}_2$ będą dowolnymi dwiema teoriami (np. teorią bazową B i teorią prawdy). Powiemy, że Th_2 jest **konserwatywna semantycznie** nad Th_1, jeśli dla dowolnego modelu $M \models \mathrm{Th}_1$

Kluczowe pojęcia

Niech $\mathrm{Th}_1, \mathrm{Th}_2$ będą dowolnymi dwiema teoriami (np. teorią bazową B i teorią prawdy). Powiemy, że Th_2 jest **konserwatywna semantycznie** nad Th_1, jeśli dla dowolnego modelu $M \models \mathrm{Th}_1$ istnieje taki podzbiór $T \subseteq M$, że

$$(M, T) \models \mathrm{Th}_2.$$

Kluczowe pojęcia

Niech $\mathrm{Th}_1, \mathrm{Th}_2$ będą dwiema teoriami prawdy nad tą samą teorią bazową B.

Kluczowe pojęcia

Niech $\mathrm{Th}_1, \mathrm{Th}_2$ będą dwiema teoriami prawdy nad tą samą teorią bazową B. Powiemy, że Th_1 jest B-**konserwatywna semantycznie** nad Th_2, jeśli dla dowolnego modelu $M \models B$

Kluczowe pojęcia

Niech $\mathrm{Th}_1, \mathrm{Th}_2$ będą dwiema teoriami prawdy nad tą samą teorią bazową B. Powiemy, że Th_1 jest B-**konserwatywna semantycznie** nad Th_2, jeśli dla dowolnego modelu $M \models B$ jeśli istnieje podzbiór $T \subseteq M$, taki że

$$(M, T) \models \mathrm{Th}_1,$$

to istnieje $T' \subseteq M$, taki że $(M, T') \models \mathrm{Th}_2$.

Pytanie zasadnicze

Możemy teraz przeformułować nasze podstawowe pytanie:

- Które własności pojęcia prawdy sprawiają, że staje się ono niekonserwatywne nad arytmetyką Peana?

Pytanie zasadnicze

Możemy teraz przeformułować nasze podstawowe pytanie:

- Które własności pojęcia prawdy sprawiają, że staje się ono niekonserwatywne nad arytmetyką Peana?
- Które własności pojęcia prawdy sprawiają, że staje się ono niekonserwatywne semantycznie nad PA?

Pytanie zasadnicze

Możemy teraz przeformułować nasze podstawowe pytanie:

- Które własności pojęcia prawdy sprawiają, że staje się ono niekonserwatywne nad arytmetyką Peana?
- Które własności pojęcia prawdy sprawiają, że staje się ono niekonserwatywne semantycznie nad PA?
- Które aksjomaty dla predykatu prawdy pozwalają udowodnić więcej twierdzeń?

Pytanie zasadnicze

Możemy teraz przeformułować nasze podstawowe pytanie:

- Które własności pojęcia prawdy sprawiają, że staje się ono niekonserwatywne nad arytmetyką Peana?
- Które własności pojęcia prawdy sprawiają, że staje się ono niekonserwatywne semantycznie nad PA?
- Które aksjomaty dla predykatu prawdy pozwalają udowodnić więcej twierdzeń?
- Między którymi teoriami prawdy zachodzi relacja PA-konserwatyności semantycznej?

Pytanie zasadnicze

Możemy teraz przeformułować nasze podstawowe pytanie:

- Które własności pojęcia prawdy sprawiają, że staje się ono niekonserwatywne nad arytmetyką Peana?
- Które własności pojęcia prawdy sprawiają, że staje się ono niekonserwatywne semantycznie nad PA?
- Które aksjomaty dla predykatu prawdy pozwalają udowodnić więcej twierdzeń?
- Między którymi teoriami prawdy zachodzi relacja PA-konserwatyności semantycznej?

Pytanie zasadnicze

Możemy teraz przeformułować nasze podstawowe pytanie:

- Które własności pojęcia prawdy sprawiają, że staje się ono niekonserwatywne nad arytmetyką Peana?
- Które własności pojęcia prawdy sprawiają, że staje się ono niekonserwatywne semantycznie nad PA?
- Które aksjomaty dla predykatu prawdy pozwalają udowodnić więcej twierdzeń?
- Między którymi teoriami prawdy zachodzi relacja PA-konserwatyności semantycznej?

W ramach wystąpienia skupimy się na punkcie pierwszym.

Słabość pojęcia prawdy

Jednym z podstawowym wyników jest następujące twierdzenie

Twierdzenie (Kotlarski–Krajewski–Lachlan, Enayat–Visser, Leigh)

CT^- *jest konserwatywna nad* PA.

Jeśli zakładamy tylko to, że prawda jest kompozycyjna, nie uda nam się uzyskać żadnych nowych informacji o pozasemantycznych aspektach świata.

Uwaga

Metodami wykorzystanymi w dowodach konserwatywności CT^- pióra Enayata-Vissera i Leigha można pokazać, że CT^- rozszerzona o następujące zdanie:

$$\forall \phi \ \ \mathrm{Ax}_{\mathrm{PA}}(\phi) \rightarrow T(\phi) \tag{TPA}$$

jest w dalszym ciągu konserwatywna.

Siła prawdy kompozycyjnej

CT to teoria powstająca przez dodanie do CT^- wszystkich podstawień schematu indukcji, tj. wszystkich zdań postaci

$$\Big(\forall x\ \phi(x) \to \phi(Sx)\Big) \longrightarrow \Big(\phi(0) \to \forall x\ \phi(x)\Big)$$

gdzie ϕ jest dowolną formułą rozszerzonego języka (a zatem może zawierać predykat prawdy).

CT jest teorią bardzo niekonserwatywną nad PA:

Twierdzenie

$$\begin{aligned} \mathrm{CT} &\vdash \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}} \\ \mathrm{CT} &\vdash \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}+\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}} \\ \mathrm{CT} &\vdash \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}+\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}+\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Szkic zarysu koncepcji dowodu

Przez indukcję po złożoności dowodu *wewnątrz* CT, dowodzimy następującego zdania

$$\forall\phi \ \ \mathrm{Pr}_T(\phi) \rightarrow T(\phi) \tag{GRP}$$

tj. arytmetyczny odpowiednik zdania: zbiór zdań prawdziwych zawiera aksjomaty PA i jest domknięty na dowodliwość w logice pierwszego rzędu.

Szkic zarysu koncepcji dowodu

Przez indukcję po złożoności dowodu *wewnątrz* CT, dowodzimy następującego zdania

$$\forall\phi \;\; \mathrm{Pr}_T(\phi) \rightarrow T(\phi) \tag{GRP}$$

tj. arytmetyczny odpowiednik zdania: zbiór zdań prawdziwych zawiera aksjomaty PA i jest domknięty na dowodliwość w logice pierwszego rzędu. Naturalny dowód (GRP) nie wymaga wszystkich podstawień schematu indukcji, a jedynie tych dla formuł postaci Σ_1.

Widzieliśmy, że niektóre intuicyjnie silne zasady dla pojęcia prawdy nie pozwalają na dowodzenie nowych twierdzeń arytmetycznych.

Widzieliśmy, że niektóre intuicyjnie silne zasady dla pojęcia prawdy nie pozwalają na dowodzenie nowych twierdzeń arytmetycznych. Naszym celem jest lepsze zrozumienie, które własności w połączeniu z kompozycyjnością sprawiają, że pojęcie prawdy niesie istotną treść.

Jedną z rozważanych przez nas własności rozszerzających podstawową teorię kompozycyjną jest:

$$\forall x \ \Big(\mathrm{SetSent}(x) \rightarrow \big(T(\bigvee x) \equiv \exists \phi \in x \ \ T(\phi)\big)\Big). \qquad \text{(DC)}$$

Gdzie SetSent(x) jest predykatem arytmetycznym mówiącym: „x koduje zbiór zdań".

Główne twierdzenie

Następujące teorie prawdy dowodzą tych samych twierdzeń arytmetycznych

1. $\mathrm{CT}^- + (\mathrm{DC}) + (\mathrm{TPA})$

Główne twierdzenie

Następujące teorie prawdy dowodzą tych samych twierdzeń arytmetycznych

1. $\mathrm{CT}^{-} + (\mathrm{DC}) + (\mathrm{TPA})$
2. $\mathrm{CT}^{-} + (\mathrm{GRP})$.

Wnioski

Następujące teorie prawdy mają takie same konsekwencje arytmetyczne:

1. $\mathrm{CT}^- + (\mathrm{GRP})$

Wnioski

Następujące teorie prawdy mają takie same konsekwencje arytmetyczne:

1. $\mathsf{CT}^- + (\mathsf{GRP})$
2. CT_0 czyli CT^- rozszerzona o wszystkie podstawienia schematu indukcji przez formuły klasy Δ_0.

Inne naturalne zasady dla pojęcia prawdy

Możemy rozważać warianty (GRP), w których albo ograniczamy środki dowodowe do logiki zdań, albo opuszczamy warunek domknięcia.

Inne naturalne zasady dla pojęcia prawdy

Możemy rozważać warianty (GRP), w których albo ograniczamy środki dowodowe do logiki zdań, albo opuszczamy warunek domknięcia.
Zasadę refleksji zdaniowej definiujemy jako:

$$\forall \phi \ \ \mathrm{Pr}^{\mathrm{Sent}}_{\mathrm{PA}}(\phi) \rightarrow T(\phi). \tag{PRP}$$

Inne naturalne zasady dla pojęcia prawdy

Możemy rozważać warianty (GRP), w których albo ograniczamy środki dowodowe do logiki zdań, albo opuszczamy warunek domknięcia.
Zasadę refleksji zdaniowej definiujemy jako:

$$\forall\phi \ \ \mathrm{Pr}^{\mathrm{Sent}}_{\mathrm{PA}}(\phi) \rightarrow T(\phi). \tag{PRP}$$

Zasadę prawdziwości logiki pierwszego rzędu definiujemy jako:

$$\forall\phi \ \ \mathrm{Pr}(\phi) \rightarrow T(\phi). \tag{TFOL}$$

Inne naturalne zasady dla pojęcia prawdy

Możemy rozważać warianty (GRP), w których albo ograniczamy środki dowodowe do logiki zdań, albo opuszczamy warunek domknięcia.
Zasadę refleksji zdaniowej definiujemy jako:

$$\forall\phi \ \ \mathrm{Pr}^{\mathrm{Sent}}_{\mathrm{PA}}(\phi) \rightarrow T(\phi). \tag{PRP}$$

Zasadę prawdziwości logiki pierwszego rzędu definiujemy jako:

$$\forall\phi \ \ \mathrm{Pr}(\phi) \rightarrow T(\phi). \tag{TFOL}$$

Zasadę prawdziwości tautologii logiki zdań definiujemy jako:

$$\forall\phi \ \mathrm{Pr}^{\mathrm{Sent}}(\phi) \rightarrow T(\phi). \tag{TPR}$$

Wnioski c.d.

Następujące teorie dowodzą tych samych twierdzeń arytmetycznych:

1. $\mathrm{CT}^- + (\mathrm{GRP})$

Wnioski c.d.

Następujące teorie dowodzą tych samych twierdzeń arytmetycznych:

1. $CT^- + (GRP)$
2. CT_0 czyli CT^- rozszerzona o wszystkie podstawienia schematu indukcji formułami klasy Δ_0.

Wnioski c.d.

Następujące teorie dowodzą tych samych twierdzeń arytmetycznych:

1. $\mathrm{CT}^- + (\mathrm{GRP})$
2. CT_0 czyli CT^- rozszerzona o wszystkie podstawienia schematu indukcji formułami klasy Δ_0.
3. $\mathrm{CT}^- +$ (PRP). (Cieśliński).

Wnioski c.d.

Następujące teorie dowodzą tych samych twierdzeń arytmetycznych:

1. $\mathrm{CT}^- + (\mathrm{GRP})$
2. CT_0 czyli CT^- rozszerzona o wszystkie podstawienia schematu indukcji formułami klasy Δ_0.
3. $\mathrm{CT}^- + (\mathrm{PRP})$. (Cieśliński).
4. $\mathrm{CT}^- + (\mathrm{TFOL})$. (Cieśliński).

Pytania otwarte

1. Czy $CT^{-} + (TPR)$ jest konserwatywna PA?

Pytania otwarte

1. Czy $CT^{-}+$ (TPR) jest konserwatywna PA?
2. Czy $CT^{-}+$ (DC) jest konserwatywna nad PA?

To już naprawdę ostatnia uwaga

Wiemy, że jeśli rozszerzymy język PA o symbole dla (niektórych) pierwotnie rekurencyjnych funkcji, nad $\mathrm{CT}^{-} + (\mathrm{TPR}) + (\mathrm{DC})$, zasada (GRP) jest równoważna następującej **zasadzie ekstensjonalności**

$$\forall \phi \forall t, s \Big(\mathrm{TermSeq}(t) \wedge \mathrm{TermSeq}(s) \wedge \mathrm{val}(t) = \mathrm{val}(s) \rightarrow$$

$$\rightarrow T(\phi(s)) \equiv T(\phi(t)) \Big)$$

Dziękujemy bardzo za uwagę.[1]

[1] Żadne z podanych twierdzeń nie było prima aprilisowym dowcipem