

# O sile różnych własności pojęcia prawdy

Mateusz Łełyk, Bartosz Wcisło

24 marca 2016

Nasze wystąpienie dotyczy formalnych teorii prawdy, czyli teorii aksjomatycznych, które mają w ścisły sposób ujmować rozmaite własności predykatu „ $x$  jest zdaniem prawdziwym”, i które stanowią ważne narzędzie badania oraz oceny rozmaitych stanowisk filozoficznych związanych z tym pojęciem.

Formalne teorie prawdy definiujemy na ogół wedle następującego schematu:

- Bierzemy pewną teorię  $B$ , teorię bazową, która może stanowić podstawową teorię aksjomatyczną dla całej matematyki. W roli  $B$  wystąpić może na przykład arytmetyka Peana PA lub teoria mnogości Zermela-Fränkla ZFC. W zastosowaniach myślimy o  $B$  jako o całej dostępnej nam wiedzy z wyłączeniem wiedzy o semantyce.
- Do języka  $B$  dodajemy predykat  $T(x)$ , którego intuicyjne odczytanie brzmi: „ $x$  jest zdaniem prawdziwym” lub, nieco dokładniej, „ $x$  jest kodem Gödrowskim zdania prawdziwego”. Rozszerzamy  $B$  o aksjomaty właściwe dla predykatu prawdy (np. głoszące, że predykat ów jest kompozycyjny).

W praktyce badanie teorii prawdy polega na badaniu rozmaitych układów aksjomatów dodawanych w punkcie drugim, przy ustaleniu teorii z punktu pierwszego. Interesować nas mogą zarówno pytania o relacje między teorią  $B$ , jak i teoriami prawdy nad teorią  $B$ , jak i wzajemne relacje między rozmaitymi teoriami prawdy.

W naszych badaniach staramy się w szczególności zrozumieć, które aksjomaty oddzielają „silne” teorie prawdy od „słabych” oraz jaki jest właściwy sposób porównywania siły teorii prawdy. Teoria prawdy  $Th$  może być silniejsza od  $B$  na przykład w następujących znaczeniach:

1. Th dowodzi więcej zdań z języka teorii  $B$  niż teoria  $B$ . Można ten warunek rozumieć tak, że Th pozwala dowieść nowych faktów o „zwykłym świecie”, w przeciwieństwie do faktów związanych jedynie z samym pojęciem prawdy.
2. Istnieją modele teorii  $B$ , w których nie można znaleźć podzbioru  $T$ , który mógłby stanowić interpretację predykatu  $T(x)$  spełniającego aksjomaty Th. Innymi słowy, nie w każdym świecie możliwym da się wyróżnić zbiór zdań prawdziwych w sensie teorii Th.
3. Teorii Th nie można zinterpretować w  $B$ .

Jeśli teoria Th nie spełnia warunku 1. mówimy, że jest **konserwatywna syntaktycznie (teoriowodowo)**. Klasyczne twierdzenie Kotlarskiego–Krajewskiego–Lachlana orzeka, że teoria uzyskana przez dodanie do PA predykatu prawdy dla zdań arytmetycznych zaksjomatyzowanego przez czyste kompozycyjne warunki Tarskiego, jest konserwatywna syntaktycznie nad PA. W naszym referacie przedstawimy wyniki badań prowadzonych wspólnie z Cezarym Cieślińskim, w których staramy się ustalić, gdzie przebiega naturalna granica między teoriami konserwatywnymi a niekonserwatywnymi. Innymi słowy, jakie naturalne aksjomaty dodane do czystych warunków kompozycyjnych sprawiają, że predykat prawdy staje się silny w opisanym wyżej znaczeniu.

Jeśli wystarczy na to czasu, postaramy się ponadto powiedzieć o próbach porównywania siły teorii prawdy w sensie warunków 2. i 3 oraz związanych z nimi klasycznych wynikach i nowych ustaleniach.